Sur la théorie des excursions pour des processus de Lévy symétriques stables d'indice α]1,2] et quelques applications

Fernando Cordero

École Doctorale Paris Centre

Thèse de doctorat

Spécialité : Mathématiques

présentée par

Fernando Cordero

“Sur la théorie des excursions pour des processus de Lévy symétriques stables d'indice $\alpha \in]1, 2]$, et quelques applications.”

---

dirigée par Frédérique Petit et Marc Yor

Soutenue le 22 septembre 2010 devant le jury composé de :

María-Emilia Caballero	Univ. Nat. Aut. de México	Rapporteur
Philippe Carmona	Université de Nantes	Examinateur
Loïc Chaumont	Université d'Angers	Rapporteur
Ron Doney	University of Manchester	Examinateur
Thomas Duquesne	Université Paris VI	Examinateur
Frédérique Petit	Université Paris VI	Directrice de thèse
Marc Yor	Université Paris VI	Directeur de thèse

Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires
4, place Jussieu - Case courrier 188
75252 Paris cedex 05

École doctorale Paris centre
4, place Jussieu - Case courrier 188
75252 Paris cedex 05

Esta tesis está dedicada a mis padres, la luz que se desprende de ella no es sino el reflejo del cariño y del apoyo incondicional que siempre me brindaron … que me siguen brindando.

"Si les portes de la perception étaient nettoyées, chaque chose apparaîtrait telle qu'elle est, infinie." William Blake

Remerciements

Avant tout, je voudrais commencer par remercier ma famille. Remercier mes parents Ana et Sergio de m'avoir appris à rêver, de m'avoir poussé à accomplir chacun de mes rêves, de faire croître en moi le sentiment que rien n'était impossible. Remercier mon frère Sergio, sa femme Soraya et mes nièces Karla et Paula pour me faire sentir à chaque instant que malgré la distance physique, nos cœurs restent infiniment proches.

Je voudrais remercier très spécialement ma directrice de thèse Frédérique Petit pour sa patience, pour ses conseils, pour sa disponibilité inconditionnelle tout au long de ces années.

Je voudrais aussi remercier mon directeur de thèse Marc Yor pour avoir partagé avec moi sa vision panoramique des mathématiques, m'avoir appris à découvrir la finesse et la profondeur de certains résultats et m'avoir encouragé quand la motivation semblait m'échapper.

Je tiens à remercier Maria Emilia Caballero et Loïc Chaumont qui ont accepté d'être rapporteurs de ce travail. J'éprouve une énorme gratitude pour toutes les remarques et conseils qu'ils m'ont apportés. Je remercie vivement aussi les membres du jury d'avoir accepté d'assister à ma soutenance de thèse.

Merci à l'ensemble de WIP, ceux qui sont encore là et ceux qui en ont fait partie. Ce groupe de travail m'a permis non seulement de présenter régulièrement mes progrès, mais aussi d'entendre ceux des autres, ce qui a été très enrichissant pour moi.

Merci à tous les thésards que j'ai rencontrés pendant ces années de thèse. Travailler en leur compagnie a été une très belle expérience.

Cette thèse a pu être développée grâce à une bourse *Master 2 investigación y Doctorado*, Embajada de Francia en Chile - CONICYT.

Y quisiera agradecer a la familia parisina, los amigos que durante este largo viaje me han acompañado a descubrir Paris una y mil veces, de una y mil maneras. Amigos con quienes he compartido alegrías y tristezas, miedos y certitudes. Betsa, Negro, Claudia, Juani, Pamela, Edu, Cathy, Pierre, Claudio, Nestor, Tamarillos, Cony... los quiero mucho.

Y para terminar quisiera agradecer a mi Betti, no solo por los innumerables momentos felices que hemos compartido, sino también por ayudarme a encontrar la disciplina en estos últimos años, por soportarme en los momentos de estrés, por ayudarme a ver más claro cuando todo se veía oscuro. Bettina, muchas gracias, tu compañía, tus consejos, tu amor han sido cruciales en la culminación de este trabajo.

Résumé

Sur la théorie des excursions pour des processus de Lévy symétriques stables d'indice $\alpha \in]1, 2]$ et quelques applications

Résumé

Cette thèse est constituée de 5 chapitres.

Le chapitre 1 est divisé en deux parties ; la première autour des généralités sur les processus de Lévy et la deuxième sur le cas particulier des processus symétriques stables.

Le chapitre 2 porte sur la théorie des fluctuations dans le cas stable et concentre la plupart des résultats originaux de cette thèse. Dans ce chapitre, on s'intéresse premièrement à la loi conjointe du premier temps de passage au-dessus d'une barrière et de la position du processus en cet instant ainsi qu'à des questions autour de l'absolue continuité de la loi du supremum. Dans un deuxième temps, on s'intéresse à la loi conjointe du processus au temps t, de son supremum avant t et du dernier temps d'atteinte du supremum avant t.

Le chapitre 3 est aussi constitué des deux parties, une partie sur les temps locaux et une autre partie sur la théorie des excursions. Les deux parties sont traitées dans le cas des processus symétriques stables d'indice supérieur à 1. Concernant les temps locaux, on rappelle leur définition et leurs principales propriétés. Concernant la théorie des excursions, on présente la théorie de façon semblable aux cas classiques en passant entre autres par les définitions d'excursion normalisée et de méandre, et en donnant des constructions simples pour ces objets. On présente aussi quelques développements récents de la théorie dus à K.Yano, Y. Yano et M. Yor.

Les chapitres 4 et 5 portent sur des applications (dans le cas symétrique stable) de la théorie des excursions à l'étude respectif des temps passés positif et négatif et des valeurs principales généralisées.

Mots-clefs

Processus de Lévy, Processus de Lévy stables, Propriété de scaling, Théorie des fluctuations, Théorie des excursions, Temps locaux.

On the excursion theory for the symmetric stable Lévy processes with index $\alpha \in]1,2]$ and some applications

Abstract

This thesis consists of five chapters.

Chapter 1 is divided in two parts; first part concerns the general Lévy processes and the second one, the particular case of symmetric stable Lévy processes.

Chapter 2 focuses on the theory of fluctuations in the stable case and contains most of the original results of this thesis. In this chapter, we study the joint distribution of the first passage time over a fixed barrier and the corresponding overshoot. We then look into the joint distribution of the process at time t, its supremum before t and the last hitting time of the supremum before t.

Chapter 3 is also composed of two parts. First part treats local times and the second deals with the excursion theory. Both are studied in the case of symmetric stable Lévy processes with index greater than 1. For the local times we give the fundamental definitions and classical properties. Concerning the excursion theory, we develop an exposition in a classical way. We provide, among others, the definitions of normalized excursion and meander. We also give simple constructions for these objects. Finally, some recent results due to K.Yano, Y. Yano and M. Yor are exposed.

Chapters 4 and 5 deal with applications (in the symmetric stable case) of excursions theory. We study the time spent positive and negative. and generalised principal values.

Keywords

Lévy processes, Stable Lévy processes, Scaling property, Fluctuation theory, Excursion theory, Local times.

Table des matières

Introduction

La théorie générale des excursions (voir par exemple [6], [25] et [29]) associe à un processus de Markov pour lequel un point donné, disons 0, est régulier, un processus de Poisson ponctuel (le processus des excursions) à valeurs dans un espace de trajectoires (l'espace des excursions), et donc aussi une mesure d'intensité (la mesure d'excursion). Bien sûr, pour ce processus de Poisson ponctuel des formules clés additives et exponentielles mettent en lien direct le processus de Markov de départ et la mesure d'excursion. Ainsi, une bonne connaissance de la mesure d'excursion permet d'obtenir une bonne connaissance du processus de Markov, et inversement.

Dans le cas brownien, la théorie des excursions a été largement développée, en particulier avec la description de Williams de la mesure d'excursion. La propriété de scaling et la continuité des trajectoires jouent un rôle très important dans l'obtention des résultats. Une partie de ces résultats a été généralisée au cas des diffusions régulières. Encore une fois, la continuité des trajectoires joue un rôle primordial.

Les processus de Lévy stables d'indice $\alpha \in]1,2]$ font l'objet principal de ce travail de thèse. Pour ces processus on peut définir de façon analogue au cas brownien des temps locaux et en ce sens, on peut définir de façon très naturelle le processus des excursions, ainsi que la mesure d'excursion associée. La littérature sur ce sujet étant vaste, mais très éparpillée, un des buts de ce travail est de rassembler la littérature existante et de l'exposer de manière claire et précise.

Cette thèse est constituée de 5 chapitres. L'ordre dans lequel ces chapitres sont disposés n'est pas chronologique, mais il me semble être l'ordre naturel pour les présenter.

Le chapitre 1 est divisé en deux parties ; la première autour des généralités sur les processus de Lévy et la deuxième sur le cas particulier des processus symétriques stables. Dans la première partie, on commence par donner les définitions d'un processus de Lévy et d'autres objets liés à leurs lois, comme l'exposant caractéristique ou la mesure de Lévy. On parle ensuite de la propriété de Markov, on définit le semi-groupe et la famille de résolvantes associés. On présente des conditions classiques qui entraînent l'existence et la régularité de densités pour le semi-groupe (et donc, pour la famille de résolvantes).

Dans la deuxième partie, on donne la définition d'un processus stable symétrique d'indice $\alpha \in]0,2]$ et on vérifie selon les valeurs de α si les conditions pour l'existence de densités (pour le semi-groupe et la famille de résolvantes) sont satisfaites. On donne des expressions pour ces densités dans certains cas particuliers. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, on s'intéresse, dans le cas symétrique stable d'indice $\alpha > 1$, aux temps d'atteinte d'un niveau donné par le processus. Plus précisément, on exprime leur loi à l'aide de deux variables aléatoires indépendantes, plus ou moins explicites (voir aussi [46], lemmes 2.16, 2.17 et théorème 5.3).

Le chapitre 2 porte sur la théorie des fluctuations et concentre la plupart des résultats originaux de cette thèse. Dans ce chapitre, on s'intéresse premièrement à la loi conjointe du premier temps de passage au-dessus d'une barrière et de la position du processus en cet instant. Le point de départ est une formule, dûe à Pecherskii et Rogozin (voir [36]), pour la transformée de Laplace de cette loi conjointe quand on considère une barrière exponentielle indépendante. On inverse cette formule pour trouver une expression pour la transformée de Laplace conjointe, cette fois-ci à barrière fixe, disons $x > 0$. Ensuite, dans le cas α-stable, avec $1 < \alpha < 2$, à partir de cette nouvelle formule et à l'aide de certains résultats asymptotiques, on retrouve la loi du processus au premier temps de passage au-dessus du niveau x. Ce résultat avait été déjà obtenu par Ray, dans le cas symétrique, et Bingham, dans le cas d'un processus non spectralement négatif. Cependant l'intérêt de la preuve qu'on fournit est son caractère élémentaire qui permet de voir très clairement le rôle joué par la propriété de scaling. Ensuite, on conditionne le premier temps de passage au-dessus du niveau x à avoir un saut au-dessus de x plus petit que h et on fait tendre h vers 0. On montre la convergence en loi vers une variable aléatoire qui, sous certaines conditions techniques, permet d'aborder certaines questions concernant l'absolue continuité de la loi du supremum.

Dans un deuxième temps, toujours dans le cas α-stable, on s'intéresse à la loi conjointe du processus au temps t, de son supremum avant t et du dernier temps d'atteinte du supremum avant t. Comme dans le cas précédent, on commence avec une formule dûe à Pecherskii et Rogozin (voir [36]), pour la transformée de Laplace du triplet des variables, prises en un temps exponentiel indépendant. L'idée à nouveau, c'est d'inverser cette formule pour en trouver une à temps fixe. De cette façon, on arrive à caractériser la loi du triplet. Le résultat obtenu, peut être vu comme un cas particulier de la proposition 16 et du corollaire 17 du chapitre VIII dans [6] concernant des constructions trajectorielles pour le méandre et le méandre dual du processus réfléchi. Comme précédemment, l'intérêt de la démonstration qu'on propose réside dans le fait qu'on peut visualiser de façon plus explicite le rôle de la propriété de scaling dans l'obtention du résultat.

Le chapitre 3 est aussi constitué des deux parties, une partie sur les temps locaux et une autre partie sur la théorie des excursions. Les deux parties sont traitées dans le cas des processus symétriques stables d'indice $\alpha > 1$. Concernant les temps locaux, on commence par donner leur définition et rappeler leurs principales propriétés : formule d'occupation, caractère höldérien, formule de Tanaka, etc. Ensuite, on définit l'inverse continu à droite du temps local en 0. Après quelques considérations autour de la formule de Feynman-Kac, on donne finalement une généralisation du lemme 9 du chapitre V dans [6] concernant la construction d'une martingale associée aux temps locaux.

Dans la partie sur la théorie des excursions, on présente la théorie de façon semblable aux cas classiques (mouvement brownien et diffusions régulières) en passant entre autres par les définitions d'excursion normalisée et de méandre, et en donnant des constructions trajectorielles simples pour ces objets. On présente aussi quelques développements récents de la théorie dus à K.Yano, Y. Yano et M. Yor.

Dans le chapitre 4, on s'intéresse aux temps passés positif et négatif par un processus de

Lévy symétrique stable d'indice $\alpha > 1$. On s'appuie sur le calcul fait par Fitzsimmons et Getoor dans [22] de la transformée de Laplace conjointe de l'inverse du temps local en 0 et du temps passé positif par le processus jusqu'à cet instant-là. Ensuite, à l'aide des formules-clé, on récupère de l'information sur la mesure d'excursion qui nous permet de calculer d'autres transformées de Laplace liées au temps passé positif. À l'aide des variables aléatoires G_γ (voir les notations), on arrive ensuite à exprimer la mesure de Lévy d'une pseudo-transformée de Laplace uni-dimensionnelle associée aux temps passé positif et négatif. On cherche alors à établir des liens entre la mesure de Lévy conjointe pour ces temps d'occupation et les variables G_γ.

Le chapitre 5 porte sur les valeurs principales associées aux temps locaux. On présente d'abord le résultat de Biane et Yor ([9]) concernant, dans un cadre brownien, le calcul d'une transformée de Laplace bi-dimensionnelle associée à des valeurs principales généralisées prises en l'inverse du temps local en 0. Ensuite, on présente un résultat analogue pour les valeurs principales "simples" d'un processus de Lévy ([21] pour le cas symétrique stable d'indice $\alpha > 1$ et [6] pour le cas d'un processus de Lévy vérifiant une certaine condition technique). On montre dans le cas symétrique stable d'indice $\alpha > 1$ que le caractère höldérien des temps locaux permet de définir des valeurs principales généralisées (comme dans le cas brownien). Ensuite, en suivant le schéma de la démonstration de Bertoin du résultat pour les valeurs principales "simples", on trouve des relations beaucoup moins explicites pour les valeurs principales généralisées.

Notations

Fonctions spéciales

Si $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z)$ désigne la partie réelle de z et $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire.

On désigne par Γ la fonction gamma :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

B désigne la fontion béta d'Euler :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \mathrm{Re}(x) > 0,\ \mathrm{Re}(y) > 0.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$, on note $(\lambda)_k$ le symbole de Pochhammer :

$$(\lambda)_0 = 1, \quad (\lambda)_k = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1), \quad k = 1, 2\ldots$$

Pour $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leq q+1$ et des nombres complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ et $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ (avec $\gamma_i \neq 0, -1, -2, \ldots$), on définit la fonction hypergéométrique généralisée :

$${}_pF_q(\alpha_1, \ldots \alpha_p;\, \gamma_1 \ldots \gamma_q;\, z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\prod_{r=1}^{p} (\alpha_r)_k}{\prod_{s=1}^{q} (\gamma_s)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

Remarque. *Si $p \leq q$, ${}_pF_q$ est une fonction entière. Pour $p = q+1$ le rayon de convergence de la série est égal à 1, mais on peut étendre la définition de la fonction à tout le plan complexe par prolongement analytique.*

On définit les fonctions sinus intégral si et Si par :

$$\mathrm{si}(z) = -\int_z^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt, \quad \mathrm{Si}(z) = \int_0^{z} \frac{\sin(t)}{t}\, dt, \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

De même, on définit les fonctions cosinus intégral ci et Ci par :

$$\mathrm{ci}(z) = -\,\mathrm{Ci}(z) = \int_z^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\, dt, \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Remarque. *Les fonctions* Si *et* si *sont des primitives de la fonction* $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Si *est la primitive nulle en* 0 *et* si *la primitive nulle à l'infini. On a la relation suivante :*

$$\mathrm{Si}(z) = \frac{\pi}{2} + \mathrm{si}(z).$$

La fonction Ci *est la primitive de la fonction* $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$ *nulle à l'infini.*

Variables aléatoires

Γ_a désigne une variable gamma de paramètre $a > 0$:

$$\mathbb{P}[\Gamma_a \in dz] = \frac{1}{\Gamma(a)} e^{-z}\, z^{a-1} 1_{\{z>0\}}\, dz.$$

$\beta_{a,b}$ désigne une variable béta de paramètres $a > 0$ et $b > 0$:

$$\mathbb{P}[\beta_{a,b} \in du] = \frac{1}{B(a,b)} u^{a-1}\,(1-u)^{b-1} 1_{\{0<u<1\}}\, du.$$

$\mathbf{e}_p$ désigne une variable exponentielle de paramètre $p > 0$:

$$\mathbb{P}[\mathbf{e}_p \in du] = p\, e^{-pu}\, 1_{\{u>0\}} du.$$

Lorsque le paramètre vaut 1, on désigne par $\mathbf{e}$ une exponentielle standard.
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ désigne une variable normale d'espérance μ et d'écart type $\sigma > 0$:

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \in dx] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Lorsque $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on désigne par $\mathcal{N}$ une variable normale centrée réduite.

Pour $0 < \beta < 1$, notons $\mathcal{T}_\beta$ une variable stable unilatérale standard d'indice β dont la transformée de Laplace est donnée par

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-t\mathcal{T}_\beta\right)\right] = \exp(-t^\beta), \qquad t \geq 0.$$

Pour $\gamma \in]0,1[$, on note G_γ une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$ de densité donnée par :

$$f_{G_\gamma}(u) = \frac{\gamma \sin(\pi\gamma)}{(1-\gamma)\pi}\; \frac{u^{\gamma-1}(1-u)^{\gamma-1}}{(1-u)^{2\gamma} - 2(1-u)^\gamma u^\gamma \cos(\pi\gamma) + u^{2\gamma}} 1_{]0,1[}(u).$$

Pour $\gamma, \delta \in]0,1[$, on note $G_{\gamma,\delta}$ une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$ qui a pour transformée de Stieltjes :

$$E\left[\frac{1}{\lambda + G_{\gamma,\delta}}\right] = \frac{\gamma}{1-\delta}\, \frac{\lambda^{\gamma-\delta}\left(\lambda^{\delta-1} - (1+\lambda)^{\delta-1}\right)}{(1+\lambda)^\gamma - \lambda^\gamma}, \qquad \lambda > 0.$$

Pour $\gamma \in]0,1[$, Z_γ désigne une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de densité :

$$f_{Z_\gamma}(u) = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi\gamma}\; \frac{1}{u^2 + 2u\cos(\pi\gamma) + 1} 1_{[0,+\infty[}(u).$$

M_γ désigne une variable aléatoire de Mittag-Leffler, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de loi caractérisée par :

$$E[\exp(\lambda M_\gamma)] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n\gamma+1)}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Remarque. *Quand on écrit une identité du type :*

$$h(X_1, \ldots, X_n) \overset{(loi)}{=} k(Y_1, \ldots, Y_m),$$

on suppose toujours que dans chaque membre, les variables aléatoires considérées sont indépendantes.

Tableau comparatif

Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien réel, standard, issu de 0 et $X^{(\alpha)} = (X_t^{(\alpha)}, t \geq 0)$ un processus symétrique stable d'indice $\alpha \in]1, 2]$.

Propriété	Mouvement brownien B	Processus symétrique stable $X^{(\alpha)}$
Scaling	$(B_{at}, t \geq 0) \overset{(loi)}{=} (\sqrt{a} B_t, t \geq 0)$	$(X_{at}^{(\alpha)}, t \geq 0) \overset{(loi)}{=} (a^{1/\alpha} X_t^{(\alpha)}, t \geq 0)$
Exposant caractéristique	$\psi_2(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2$	$\psi_\alpha(\lambda) = c\lvert\lambda\rvert^\alpha$, où $c = c[X^{(\alpha)}]$ est une constante strictement positive.
Densités des distributions (voir [43])	$P_x(B_t \in dy) \equiv p_t(x-y)dy$ $p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$	$P_x(X_t^{(\alpha)} \in dy) = p_t^{(\alpha)}(x-y)dy$ $p_t^{(\alpha)}(x) = t^{-1/\alpha} p_1^{(\alpha)}(t^{-1/\alpha} x)$, $p_1^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{c^{1/\alpha}\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\frac{2n+1}{\alpha}+1)}{(2n+1)!} (\frac{x}{c^{1/\alpha}})^{2n}$.
Temps locaux	$L_t^x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{\{\lvert B_s - x\rvert \leq \varepsilon\}} ds$	$L_t^x[X^{(\alpha)}] = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{\{\lvert X_s^{(\alpha)} - x\rvert \leq \varepsilon\}} ds$
Formule d'occupation	$\int_0^t f(B_s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) L_t^x dx$	$\int_0^t f(X_s^{(\alpha)}) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) L_t^x[X^{(\alpha)}] dx$
Régularité des temps locaux (voir [2])	Ils sont höldériens d'ordre η, pour tout $\eta \in]0, 1/2[$.	Ils sont höldériens d'ordre η, pour tout $\eta \in]0, (\alpha-1)/2[$.

Propriété	Mouvement brownien B	Processus symétrique stable $X^{(\alpha)}$
Scaling pour les temps locaux	$(L^x_{at}; t \geq 0, x \in \mathbb{R}) \overset{(loi)}{=} (\sqrt{a} L_t^{x/\sqrt{a}}; t \geq 0, x \in \mathbb{R})$	$(L^x_{at}[X^{(\alpha)}]; t \geq 0, x \in \mathbb{R}) \overset{(loi)}{=} (a^{(\alpha-1)/\alpha} L_t^{x/a^{1/\alpha}}[X^{(\alpha)}]; t \geq 0, x \in \mathbb{R})$.
Inverse du temps local en 0	$\tau_\ell \equiv \inf\{u > 0;\ L^0_u > \ell\}$ $(\tau_\ell, \ell \geq 0)$ est un subordinateur stable d'indice $1/2$.	$\tau_\ell^{(\alpha)} \equiv \inf\{u > 0;\ L^0_u[X^{(\alpha)}] > \ell\}$ $(\tau_\ell^{(\alpha)}, \ell \geq 0)$ est un subordinateur stable d'indice $1 - 1/\alpha$.
Temps passés positif et négatif	$A_t^+ \equiv \int_0^t 1_{(B_s > 0)} ds$ $A_t^- \equiv \int_0^t 1_{(B_s < 0)} ds$	$A_t^{(\alpha),+} \equiv \int_0^t 1_{(X_s^{(\alpha)} > 0)} ds$ $A_t^{(\alpha),-} \equiv \int_0^t 1_{(X_s^{(\alpha)} < 0)} ds$
Loi du couple $(A^{(\alpha),+}_{\tau_\ell}, \tau_\ell)$ (voir [22])	$E[\exp(-q\tau_\ell - \lambda A^+_{\tau_\ell})] = e^{-\ell\phi(q,\lambda)}$ où $\phi(q,\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda+q}{2}} + \sqrt{\frac{q}{2}}$.	$E[\exp(-q\tau_\ell - \lambda A^{(\alpha),+}_{\tau_\ell})] = e^{-\ell\phi_\alpha(q,\lambda)}$ où $\phi_\alpha(q,\lambda) = c^{1/\alpha} \sin(\pi/\alpha) \frac{\lambda}{(q+\lambda)^{1/\alpha} - q^{1/\alpha}}$.
Loi du couple $(A^{(\alpha),+}_{\tau_\ell}, A^{(\alpha),-}_{\tau_\ell})$	$E[\exp(-aA^+_{\tau_\ell} - bA^-_{\tau_\ell})] = e^{-\ell\Phi(q,\lambda)}$ où $\Phi(a,b) = \sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}$. En particulier $A^+_{\tau_\ell}$ et $A^-_{\tau_\ell}$ sont indépendants.	$E[\exp(-aA^{(\alpha),+}_{\tau_\ell} - bA^{(\alpha),-}_{\tau_\ell})] = e^{-\ell\Phi_\alpha(q,\lambda)}$ où $\Phi_\alpha(a,b) = c^{1/\alpha} \sin(\pi/\alpha) \frac{a-b}{a^{1/\alpha} - b^{1/\alpha}}$. En particulier, $A^{(\alpha),+}_{\tau_\ell}$ et $A^{(\alpha),-}_{\tau_\ell}$ sont indépendants si et seulement si $\alpha = 2$.
Les variables $g_t^{(\alpha)}$	$g_t \equiv \sup\{s < t; B_s = 0\}$, $g_t \overset{(loi)}{=} t g_1$ De plus, g_1 suit la loi béta de paramètres $1/2$, $1/2$: $P(g_1 \in ds) = \frac{1}{\pi\sqrt{s(1-s)}} 1_{]0,1[}(s) ds$	$g_t^{(\alpha)} \equiv \sup\{s < t; X_s^{(\alpha)} = 0\}$, $g_t^{(\alpha)} \overset{(loi)}{=} t g_1^{(\alpha)}$ De plus, $g_1^{(\alpha)}$ suit la loi béta de paramètres $1 - 1/\alpha$, $1/\alpha$: $P(g_1^{(\alpha)} \in ds) = \frac{\sin((1-\frac{1}{\alpha})\pi) s^{-\frac{1}{\alpha}} (1-s)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\pi} 1_{]0,1[}(s) ds$.

Propriété	Mouvement brownien B	Processus symétrique stable $X^{(\alpha)}$
Construction trajectorielle du pont ([6], [14], [40])	$(\frac{1}{\sqrt{g_1}}B_{g_1 t}, t \in [0,1])$ est un pont indépendant de g_1.	$\big((\frac{1}{g_1^{(\alpha)}})^{1/\alpha} X^{(\alpha)}_{g_1^{(\alpha)} t}, t \in [0,1]\big)$ est un pont indépendant de $g_1^{(\alpha)}$.
Existence de valeurs principales	$H_\nu(t)$ $\equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t du \vert B_u\vert^{(1/\nu)-2} \mathrm{sgn}(B_u) 1_{(\vert B_u\vert \geq \varepsilon)}$, pour tout $\nu \in]0,2[$.	$H_\nu^{(\alpha)}(t)$ $\equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^t \vert X_u^{(\alpha)}\vert^{\frac{\alpha-1}{\nu}-\alpha} \mathrm{sgn}(X_u^{(\alpha)}) 1_{(\vert X_u^{(\alpha)}\vert \geq \varepsilon)} du$, pour tout $\nu \in]0,2[$.
Construction des processus stables symétriques	$(H_\nu(\tau_\ell), \ell \geq 0)$ est un processus symétrique stable d'indice ν, où $\nu \in]0,2[$.	$(H_\nu^{(\alpha)}(\tau_\ell^{(\alpha)}), \ell \geq 0)$ est un processus symétrique stable d'indice ν, où $\nu \in]0,2[$.
Les processus $A_\nu^{(\alpha)}$	$A_\nu(t) \equiv \int_0^t du \vert B_u\vert^{(1/\nu)-2}$, pour $\nu \in]0,1[$. Le processus $(A_\nu(\tau_\ell), \ell \geq 0)$ est un processus unilatéral stable d'indice ν.	$A_\nu^{(\alpha)}(t) \equiv \int_0^t \vert X_u^{(\alpha)}\vert^{\frac{\alpha-1}{\nu}-\alpha} du$, pour $\nu \in]0,1[$. Le processus $(A_\nu^{(\alpha)}(\tau_\ell), \ell \geq 0)$ est un processus unilatéral stable d'indice ν.
Loi du couple $(H_{\gamma\mu}^{(\alpha)}(\tau_\ell), A_\mu^{(\alpha)}(\tau_\ell))$ $\mu \in]0,1[$, $\gamma \in]0, \frac{2}{\mu}[$ (voir [9], [21] et [6]).	$E\big[\exp\big(i\lambda H_{2\mu}(\tau_\ell) - \frac{\theta^2}{2} A_\mu(\tau_\ell)\big)\big] =$ $e^{-\frac{\ell}{2} \frac{(4\mu\theta)^{2\mu} \cosh(\frac{\pi\lambda\mu}{\theta})}{\Gamma(2\mu)\sin(\pi\mu)} B(\frac{2\mu+1}{2} + i\frac{\lambda\mu}{\theta}; \frac{2\mu+1}{2} - i\frac{\lambda\mu}{\theta})}$, où $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. $(\gamma = 2)$.	$E[\exp(-q\tau_\ell + i\lambda H_1^{(\alpha)}(\tau_\ell))]$, $= e^{-\ell\lambda \coth(\lambda\kappa(q))}$ où $\kappa(q) = \frac{c^{-1/\alpha} q^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}$. $(\mu = (\alpha-1)/\alpha$ et $\gamma = 1/\mu)$.

Dans la suite, on considère $\mathbf{e}_p$ un temps exponentiel indépendant de paramètre p.

Propriété	Mouvement brownien B	Processus symétrique stable $X^{(\alpha)}$
Loi du couple $(A^{(\alpha),+}_{g_{\mathbf{e}_p}}, g^{(\alpha)}_{\mathbf{e}_p})$	$E[\exp(-\lambda A^+_{g_{\mathbf{e}_p}} - \mu g_{\mathbf{e}_p})]$ $= \frac{2p}{\lambda}\left[\sqrt{1+\frac{\mu+\lambda}{p}} - \sqrt{1+\frac{\mu}{p}}\right]$, pour $\lambda > 0, \mu > 0$.	$E[\exp(-\lambda A^{(\alpha),+}_{g_{\mathbf{e}_p}} - \mu g^{(\alpha)}_{\mathbf{e}_p})]$ $= \frac{\alpha p}{\lambda}\left[\left(1+\frac{\mu+\lambda}{p}\right)^{1/\alpha} - \left(1+\frac{\mu}{p}\right)^{1/\alpha}\right]$, pour $\lambda > 0, \mu > 0$.
Loi du couple $(A^{(\alpha),+}_{g_1^{(\alpha)}}, g_1^{(\alpha)})$	$E[\exp(-\lambda A^+_{g_1} - \mu g_1)]$ $= \frac{(\lambda+\mu)F_{1,1}(1/2,2;-(\lambda+\mu)) - \mu F_{1,1}(1/2,2;-\mu)}{\lambda}$ $= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^1 e^{-\lambda x}e^{-\mu s}s^{-\frac{3}{2}}(1-s)^{-\frac{1}{2}}1_{[0,s]}(x)dxds.$ En particulier, $A^+_{g_1}$ suit la loi béta de paramètres $1/2$ et $3/2$. De plus, la variable $\frac{A^+_{g_1}}{g_1}$ est indépendante de g_1, de loi uniforme sur $[0,1]$.	$E[\exp(-\lambda A^{(\alpha),+}_{g_1^{(\alpha)}} - \mu g_1^{(\alpha)})]$ $= \frac{(\lambda+\mu)F_{1,1}(1-1/\alpha,2;-(\lambda+\mu)) - \mu F_{1,1}(1-1/\alpha,2;-\mu)}{\lambda}$ $= \int_0^1\int_0^1 e^{-\lambda x - \mu s}\frac{s^{-1/\alpha-1}(1-s)^{1/\alpha-1}1_{[0,s]}(x)}{\alpha B(1-1/\alpha,1+1/\alpha)}dxds.$ En particulier, $A^{(\alpha),+}_{g_1^{(\alpha)}}$ suit la loi béta de paramètres $1-1/\alpha$ et $1+1/\alpha$. De plus, la variable $\frac{A^{(\alpha),+}_{g_1^{(\alpha)}}}{g_1^{(\alpha)}}$ est indépendante de $g_1^{(\alpha)}$, de loi uniforme sur $[0,1]$.
Loi de $H_1^{(\alpha)}(\mathbf{e}_p)$ (voir [21])	$E[\exp(i\lambda H_1(\mathbf{e}_p))] = \frac{1}{\cosh(\pi\lambda/\sqrt{2p})}$	$E[\exp(i\lambda H_1^{(\alpha)}(\mathbf{e}_p))] = \frac{1}{\cosh(\lambda\,\kappa(p))}$
Loi de $H_1^{(\alpha)}(g^{(\alpha)}_{\mathbf{e}_p})$ (voir [21])	$E[\exp(i\lambda H_1(g_{\mathbf{e}_p}))] = \frac{\sqrt{2p}}{\pi\lambda}\tanh(\frac{\pi\lambda}{\sqrt{2p}})$	$E[\exp(i\lambda H_1^{(\alpha)}(g^{(\alpha)}_{\mathbf{e}_p}))] = \frac{\tanh(\lambda\,\kappa(p))}{\lambda\,\kappa(p)}$
Loi conjointe des variables $H_1^{(\alpha)}(g^{(\alpha)}_{\mathbf{e}_p})$ et $H_1^{(\alpha)}(\mathbf{e}_p) - H_1^{(\alpha)}(g^{(\alpha)}_{\mathbf{e}_p})$ (voir [21])	$E[\exp(i\lambda H_1(g_{\mathbf{e}_p}) + i\mu(H_1(\mathbf{e}_p) - H_1(g_{\mathbf{e}_p})))]$ $= \frac{\tanh(\pi\lambda/\sqrt{2p})}{\lambda}\frac{\mu}{\sinh(\pi\mu/\sqrt{2p})}$. En particulier, $H_1(g_{\mathbf{e}_p})$ et $H_1(\mathbf{e}_p) - H_1(g_{\mathbf{e}_p})$ sont indépendantes.	$E[\exp(i\lambda H_1^{(\alpha)}(g^{(\alpha)}_{\mathbf{e}_p}) + i\mu(H_1^{(\alpha)}(\mathbf{e}_p) - H_1^{(\alpha)}(g^{(\alpha)}_{\mathbf{e}_p})))]$ $= \frac{\tanh(\lambda\,\kappa(p))}{\lambda}\frac{\mu}{\sinh(\mu\,\kappa(p))}$. En particulier, $H_1^{(\alpha)}(g^{(\alpha)}_{\mathbf{e}_p})$ et $H_1^{(\alpha)}(\mathbf{e}_p) - H_1^{(\alpha)}(g^{(\alpha)}_{\mathbf{e}_p})$ sont indépendantes.

Propriété	Mouvement brownien B	Processus symétrique stable $X^{(\alpha)}$
Théorèmes de Ray-Knight (voir [20], [3])	$(L^x_{\tau_\ell}, x \geq 0)$ et $(L^{-x}_{\tau_\ell}, x \geq 0)$ sont deux $BESQ^0(\ell)$ indépendants.	$(L^x_{\tau^{(\alpha)}_1}[X^{(\alpha)}] + \frac{1}{2}\eta^2_x, \quad x \in \mathbb{R}) \overset{(loi)}{=} (\frac{1}{2}(\eta_x + \sqrt{2})^2, \quad x \in \mathbb{R})$, où η est un mouvement brownien fractionnaire d'indice $\alpha - 1$, indépendant de $X^{(\alpha)}$.
Les endroits les plus visités (voir [4] et [3])	$\mathbb{W}(t) \equiv \{x \in \mathbb{R} : L^x_t = \sup_{y \in \mathbb{R}} L^y_t\}$, $W(t) \equiv \max_{x \in \mathbb{W}(t)} x$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{(\log t)^\gamma}{t^{1/2}} \lvert W(t) \rvert = +\infty, \quad p.s$, pour tout $\gamma > 9$.	$\mathbb{W}^{(\alpha)}(t) \equiv \{x \in \mathbb{R} : L^x_t[X^{(\alpha)}] = \sup_{y \in \mathbb{R}} L^y_t[X^{(\alpha)}]\}$, $W^{(\alpha)}(t) \equiv \max_{x \in \mathbb{W}^{(\alpha)}(t)} x$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{(\log t)^\gamma}{t^{1/\alpha}} \lvert W^{(\alpha)}(t) \rvert = +\infty, \quad p.s$, pour tout $\gamma > 9/(\alpha - 1)$.
Loi de la durée de vie sous la mesure d'excursions	$V(e) \equiv \inf\{t > 0 : e(t) = 0\}$, $n(V \in dv) = \frac{dv}{\sqrt{2\pi v^3}} 1_{(v>0)}$.	$V(e) \equiv \inf\{t > 0 : e(t) = 0\}$, $n_\alpha(V \in dv) = \frac{(\alpha-1)\sin(\pi/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)} c^{1/\alpha} v^{\frac{1}{\alpha}-2} 1_{(v>0)} dv$.
Comportement autour de zéro (voir [7]).	$\lim_{t \to 0} \frac{B_t}{t^\kappa} = 0$, pour $\kappa < 1/2$. $\limsup_{t \to 0} \frac{B_t}{t^\kappa} = \infty$, pour $\kappa \geq 1/2$.	$\lim_{t \to 0} \frac{X^{(\alpha)}_t}{t^\kappa} = 0$, pour $\kappa < 1/\alpha$. $\limsup_{t \to 0} \frac{X^{(\alpha)}_t}{t^\kappa} = \infty$, pour $\kappa \geq 1/\alpha$.

Chapitre 1

Processus de Lévy symétriques stables

1.1 Généralités sur les processus de Lévy

1.1.1 Quelques définitions et propriétés élémentaires

Définition 1.1 (Processus de Lévy)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $X = (X_t; t \geq 0)$ un processus stochastique défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On dit que X est un processus de Lévy d-dimensionnel si ses trajectoires sont continues à droite et limitées à gauche (càdlàg) et ses accroissements sont indépendants et stationnaires, c'est-à-dire, que pour tous $s, t \geq 0$, l'accroissement $X_{t+s} - X_t$ est indépendant du processus $(X_v; 0 \leq v \leq t)$ et a même loi que X_s. En particulier, $P(X_0 = 0) = 1$.

On notera P^x la loi de $X + x$ sous P. De même, on notera E_x et E les opérateurs d'espérance pris par rapport à P^x et P respectivement.

La propriété d'accroissements indépendants et stationnaires et la régularité des trajectoires permettent de démontrer aisément l'existence d'une fonction $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, qu'on appelle exposant caractéristique du processus de Lévy X, vérifiant :

$$\forall t \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}^d, \qquad E[e^{i<\lambda, X_t>}] = e^{-t\psi(\lambda)}. \tag{1.1}$$

Remarque 1.2. Toujours grâce à la propriété d'accroissements indépendants et stationnaires et à la régularité des trajectoires, on peut démontrer qu'un processus de Lévy est caractérisé par son exposant caractéristique.

D'autres objets permettant de caractériser un processus de Lévy sont introduits dans la formule de Lévy-Khintchine (voir par exemple section 7.6 dans Chung, [17]) :

$$\psi(\lambda) = i < a, \lambda > + \frac{1}{2} Q(\lambda) + \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{i<\lambda, x>} + i < \lambda, x > 1_{\{|x|<1\}}) \Pi(dx), \tag{1.2}$$

où $a \in \mathbb{R}^d$, Q est une forme quadratique positive et Π est une mesure dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ telle que $\int (1 \wedge |x|^2) \Pi(dx) < +\infty$. Q est appelé coefficient gaussien et Π mesure de Lévy.
La formule de Lévy-Khintchine s'écrit de façon plus simple quand le processus de Lévy est à variation finie. En fait, un processus de Lévy est à variation finie si et seulement si

son coefficient gaussien Q est nul et $\int(1 \wedge |x|)\Pi(dx) < +\infty$ (voir section I.1 dans [6]), et alors on peut écrire :

$$\psi(\lambda) = -i < \bar{a}, \lambda > + \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{i<\lambda,x>})\Pi(dx), \tag{1.3}$$

où $\bar{a} \in \mathbb{R}^d$ est appelé coefficient de drift. Si de plus, le processus de Lévy est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et n'a pas de sauts négatifs, le support de la mesure de Lévy est inclus dans $\mathbb{R}_+$. Les subordinateurs en sont un cas particulier.

Définition 1.3 (Subordinateur)**.** Un subordinateur est un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. En particulier, il s'agit de processus dont les trajectoires sont croissantes.

Dans le cas des subordinateurs, on travaille plutôt avec la transformée de Laplace qu'avec la transformée de Fourier. Dans ce cadre, on sait qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, qu'on appelle exposant de Laplace, telle que :

$$\forall t \geq 0, \forall \lambda \geq 0, \qquad E[e^{-\lambda X_t}] = e^{-t\phi(\lambda)}, \tag{1.4}$$

et grâce à (1.3) on a :

$$\forall \lambda \geq 0, \qquad \frac{\phi(\lambda)}{\lambda} = \bar{a} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\bar{\Pi}(t)dt, \tag{1.5}$$

où $\bar{\Pi}(t) = \Pi(]t, +\infty[)$.

1.1.2 Autour de la propriété de Markov

On associe au processus de Lévy X sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$ ($\mathcal{F}_t$ est la σ-algèbre complète engendrée par $(X_s; 0 \leq s \leq t)$. La propriété d'indépendance des accroissements et la régularité des trajectoires entraînent que X est un processus de Markov par rapport à $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$ (voir section I.2 dans [6]). Considérons le semi-groupe défini par :

$$P_t f(x) = E_x[f(X_t)], \tag{1.6}$$

pour toute fonction mesurable et bornée f. Il vérifie la propriété de semi-groupe, c'est-à-dire que $P_0 = Id$ et $P_t \circ P_s = P_{t+s}$.
Le semi-groupe $(P_t; t \geq 0)$ a la propriété de Feller, c'est-à-dire, que pour tout $f \in \mathcal{C}_0$, $P_t f \in \mathcal{C}_0$, et $P_t f$ converge de façon uniforme vers f quand t tend vers 0 ([6], chapitre I, proposition 5), et X est un processus de Markov fort ([6], chapitre I, proposition 6).
On définit maintenant la famille des résolvantes $(U^q; q > 0)$ par :

$$U^q f(x) = E_x\left[\int_0^{+\infty} e^{-qs} f(X_s) ds\right] = \int_0^{+\infty} e^{-qs} P_s f(x) ds, \tag{1.7}$$

où f est une fonction mesurable bornée. La propriété de semi-groupe pour $(P_t; t \geq 0)$ se traduit dans l'équation résolvente suivante :

$$U^q U^r = \frac{U^r - U^q}{q - r}, \qquad q, r > 0. \tag{1.8}$$

On considère, pour $y \in \mathbb{R}^d$, le temps d'arrêt $T_{\{y\}} = \inf\{s > 0 : X_s = y\}$ (avec par convention $\inf \emptyset = +\infty$).

Pour $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on note $P^{x,0}$ la loi du processus partant de x tué en 0, c'est-à-dire, la loi sous P^x du processus $(X_t^0; t \geq 0)$, défini par :

$$X_t^{\{0\}} = \begin{cases} X_t & \text{si} \quad t < T_{\{0\}}, \\ \delta & \text{si} \quad t \geq T_{\{0\}}, \end{cases} \tag{1.9}$$

où δ est un point isolé. On notera E_x^0 l'opérateur d'espérance pris par rapport à $P^{x,0}$. Il est facile de voir que le processus tué $X^{\{0\}}$ est aussi un processus de Markov et on peut écrire son semi-groupe et sa famille de résolvantes comme :

$$P_t^0 f(x) = E_x \left[f(X_t), t < T_{\{0\}} \right], \tag{1.10}$$

$$U_q^0 f(x) = E_x \left[\int_0^{T_{\{0\}}} e^{-qs} f(X_s) ds \right] = \int_0^{+\infty} e^{-qs} P_s^0 f(x) ds. \tag{1.11}$$

Grâce à la propriété de Markov forte au temps $T_{\{0\}}$, on a :

$$U^q f(x) = U_q^0 f(x) + E_x[e^{-qT_{\{0\}}}]\, U^q f(0). \tag{1.12}$$

1.1.3 Sur l'existence de certaines densités

Désormais dans ce chapitre, X sera un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour chaque $t > 0$, on considère la mesure $\mu_t(\cdot) \equiv P[X_t \in \cdot]$. Il est connu que chacune des conditions suivantes est suffisante pour assurer l'absolue continuité de la mesure μ_t par rapport à la mesure de Lebesgue (voir [22], [44]) :

1. $\sigma^2 > 0$,
2. $\exp(-t\psi) \in L^1(d\lambda)$ pour tout $t > 0$,
3. $\Pi_a(\mathbb{R}) = \infty$,

où σ^2 est le coefficient gaussien et Π_a est la partie absolument continue de la mesure de Lévy de X.
Si on suppose de plus que μ_t est absolument continue et si on note p_t sa densité, on a (voir [22]) :

$$P^x(X_t \in dy) = p_t(y - x) dy, \tag{1.13}$$

les densités peuvent être choisies de sorte que la fonction $(t, y) \mapsto p_t(y)$ soit mesurable en $(t, y) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}$ et :

$$p_t(y) = \int_{\mathbb{R}} p_s(y - x) p_{t-s}(x) dx, \;\; 0 < s < t. \tag{1.14}$$

Dans ce cas, la famille de résolvantes admet des densités u^q telles que :

$$U^q f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) u^q(y - x) dy, \tag{1.15}$$

et :

$$u^q(x) = \int_0^{+\infty} e^{-qs} p_s(x) ds. \tag{1.16}$$

Une autre condition qui permet d'assurer l'existence des densités u^q est (voir [6], chapitre II, théorème 19 et corollaire 20) :

$$\forall q > 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|q + \psi(\xi)|} d\xi < \infty. \tag{1.17}$$

Cette condition implique aussi que les densités u^q sont continues et que (voir [6]) :

$$u^q(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{q + \psi(\xi)}\right) d\xi, \tag{1.18}$$

$$2u^q(0) - (u^q(x) + u^q(-x)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos(\xi x))\, \mathrm{Re}\left(\frac{1}{q + \psi(\xi)}\right) d\xi, \tag{1.19}$$

et ([6], chapitre II, corollaire 18) :

$$E_x[\exp(-qT_{\{0\}})] = \frac{u^q(-x)}{u^q(0)}. \tag{1.20}$$

Il découle de (1.10), (1.11), (1.12) et (1.20) que le semi-groupe et la famille de résolvantes du processus tué en 0 admettent aussi des densités données par :

$$p_t^0(x, y) = p_t(x - y) - \int_0^t p_{t-s}(y)\, P_x(T_{\{0\}} \in ds), \tag{1.21}$$

et :

$$u_q^0(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-qt} p_t^0(x, y)\, dt = u^q(y - x) - \frac{u^q(-x)\, u^q(y)}{u^q(0)}. \tag{1.22}$$

Remarque 1.4. La condition (1.17) implique en particulier que 0 est un point régulier, c'est-à-dire, $P(T_{\{0\}} = 0) = 1$.

Remarque 1.5. Notons d'abord que les densités u^q sont intégrables. En effet, si on prend $f = 1$ et $x = 0$ dans (1.7) et (1.15), on obtient :

$$\| u^q \|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^q(y) dy = U^q 1(0) = E\Big[\int_0^{+\infty} e^{-qs} ds\Big] = \frac{1}{q} < +\infty,$$

d'où $u^q \in L^1(\mathbb{R})$.
Si on suppose de plus que les densités u^q vérifient la condition (1.17), on peut montrer que $u^q \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. En effet, de (1.20) on voit que les densités u^q sont bornées par $u^q(0)$ et alors elles sont dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
Considérons maintenant $1 < p < +\infty$ et choisissons $f = (u^q)^{p-1}$ et $x = 0$ dans (1.7) et (1.15) :

$$\| u^q \|_p^p = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^q(y))^{p-1} u^q(y) dy = E\Big[\int_0^{+\infty} e^{-qs} (u^q(X_s))^{p-1} ds\Big] \leq \frac{u^q(0)^{p-1}}{q} < +\infty,$$

ce qui montre notre assertion.

1.2 Le cas symétrique stable

1.2.1 Quelques définitions et propriétés élémentaires

Définition 1.6 (Processus stable d'indice α)**.** Un processus de Lévy X est dit stable d'indice $\alpha \in (0, 2]$ s'il vérifie la propriété de scaling d'indice α, c'est-à-dire, si pour tout $b > 0$, le processus $(b^{-1/\alpha} X_{bt}; t \geq 0)$ a même loi que X.

Définition 1.7 (Processus symétrique)**.** Un processus stochastique $Y = (Y_t; t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dit symétrique si le processus $-Y$ a même loi que Y.

Désormais, on suppose que X est un processus symétrique stable d'indice α à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans la suite on énoncera une liste de propriétés élémentaires pour les processus stables (voir par exemple [48] ou [6], chapitre VIII).

Le cas $\alpha = 2$

Dans ce cas, X est un mouvement brownien standard à une constante multiplicative près. L'exposant caractéristique est donné par $\psi_2(\lambda) = c\lambda^2$, $(c > 0)$, la mesure de Lévy est nulle et le coefficient gaussien est strictement positif, en particulier X est à variation infinie. Comme la condition (1) dans le paragraphe 1.1.3 est vérifiée, les densités p_t et u^q existent. Comme (1.17) est aussi vérifiée, les fonctions u^q sont continues et vérifient (1.18), (1.19) et (1.20). Dans ce cas particulier, on a même mieux (voir par exemple [40]) :

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad p_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{c\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4ct}},$$

$$\forall q > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad u^q(x) = \frac{1}{2\sqrt{qc}} e^{-|x|\sqrt{\frac{q}{c}}}.$$

Le cas $\alpha = 1$

Dans ce cas, X est un processus de Cauchy symétrique. L'exposant caractéristique est de la forme $\psi_1(\lambda) = c|\lambda|$. Le coefficient gaussien est nul et la mesure de Lévy est proportionelle à $|x|^{-2}dx$, donc X est à variation infinie.

D'autre part, comme la condition (3) dans le paragraphe 1.1.3 est vérifiée, les densités p_t et u^q existent. On sait même que (voir [43]) :

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad p_t(x) = \frac{c}{\pi} \frac{t}{(x^2 + c^2 t^2)},$$

et donc, on peut exprimer les densités u^q, à l'aide des fonctions spéciales ci et si, de la façon suivante (voir [38], p.135) :

$$\forall q > 0, \forall x \neq 0, \qquad u^q(x) = \frac{1}{c\pi} \left[\cos\left(\frac{q|x|}{c}\right) \mathrm{ci}\left(\frac{q|x|}{c}\right) - \sin\left(\frac{q|x|}{c}\right) \mathrm{si}\left(\frac{q|x|}{c}\right) \right].$$

Le cas $\alpha \in]0, 1[\cup]1, 2[$

Dans ce cas, l'exposant caractéristique est de la forme :

$$\psi_\alpha(\lambda) = c|\lambda|^\alpha, \tag{1.23}$$

où $c > 0$.

La mesure de Lévy est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Plus précisément :

$$\Pi(dx) = c^+|x|^{-\alpha-1}dx, \tag{1.24}$$

où $c^+ \geq 0$. Le coefficient gaussien est nul et X est à variation finie si et seulement si $\alpha \in]0,1[$.

Comme la condition (3) dans le paragraphe 1.1.3 est vérifiée, les densités p_t et u^q existent. La propriété de scaling entraîne :

$$\forall t>0, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad p_t(x) = t^{-1/\alpha}p_1(t^{-1/\alpha}x). \tag{1.25}$$

On a aussi l'expression suivante (voir [43], chapitre III, formules 14.28 et 14.30) :

$$p_1(x) = \frac{1}{c^{1/\alpha}\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\Gamma(\frac{2n+1}{\alpha}+1)}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{c^{1/\alpha}}\right)^{2n}. \tag{1.26}$$

D'autre part, la condition (1.17) est vérifiée seulement si $\alpha \in]1,2[$ et dans ce cas, le point 0 est régulier, les densités u^q sont continues et vérifient (1.18), (1.19) et (1.20). Si on suppose de plus que X est symétrique, on obtient :

$$u^q(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\lambda x)}{q+c\lambda^\alpha}d\lambda, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.27}$$

Ainsi, si on définit la fonction h par :

$$h(x) = \lim_{q\to 0+}\{u^q(0)-u^q(x)\}, \tag{1.28}$$

on trouve, à l'aide de (1.27) (pour le calcul de la constante, voir [46]), que :

$$h(x) = \frac{1}{c\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(\lambda x)}{\lambda^\alpha}\,d\lambda = \frac{1}{2c\,\Gamma(\alpha)\,\sin\left(\frac{\pi\,(\alpha-1)}{2}\right)}\,|x|^{\alpha-1}. \tag{1.29}$$

D'autre part, à l'aide des changements de variable $y = c\xi^\alpha/q$ dans un premier instant, et $t = \frac{y}{1+y}$ ensuite :

$$\begin{aligned}
u^q(0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{d\xi}{q+c\,\xi^\alpha} = \frac{c^{-1/\alpha}}{\pi\alpha}\,q^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\int_0^{+\infty}y^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+y)^{-1}dy \\
&= \frac{c^{-1/\alpha}}{\pi\alpha}\,q^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-t)^{-\frac{1}{\alpha}}\,dt = \frac{c^{-1/\alpha}B(\frac{1}{\alpha},1-\frac{1}{\alpha})}{\pi\alpha}\,q^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \\
&= \frac{c^{-1/\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha})\,\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})}{\pi\alpha}\,q^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

D'où, finalement (voir [34], 1.2.2) :

$$u^q(0) = \frac{c^{-1/\alpha}q^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\alpha\sin(\pi/\alpha)}. \tag{1.30}$$

En plus, à partir de (1.16) et (1.30), on obtient :

$$p_t(0) = \frac{c^{-1/\alpha}\Gamma(1+1/\alpha)}{\pi}t^{-1/\alpha}. \tag{1.31}$$

Remarque 1.8. On verra dans le chapitre 3 des propriétés importantes liées à la fonction h.

Remarque 1.9. Notons que :

$$\begin{aligned}
U^q f(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-qs} E_x(f(X_s))ds \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-qs} E(f(x+X_s))ds \\
\text{(scaling)} &= \int_0^{+\infty} e^{-qs} E(f(x+s^{1/\alpha}X_1))ds \\
\text{(Fubini)} &= E\left[\int_0^{+\infty} e^{-qs} f(x+s^{1/\alpha}X_1)ds\right] \\
\text{(changement de variable } v = s^{1/\alpha}|X_1|) &= E\left[\int_0^{+\infty} e^{-q(\frac{v}{|X_1|})^\alpha} f(x+\operatorname{sgn}(X_1)v)\frac{\alpha v^{\alpha-1}}{|X_1|^\alpha}dv\right] \\
\text{(symétrie)} &= \frac{1}{2}E\left[\int_0^{+\infty} e^{-q(\frac{v}{|X_1|})^\alpha} (f(x+v)+f(x-v))\frac{\alpha v^{\alpha-1}}{|X_1|^\alpha}dv\right],
\end{aligned}$$

et alors, par définition des densités u^q, on trouve :

$$u^q(x) = \frac{\alpha}{2}|x|^{\alpha-1}E\left[\frac{e^{-q\left(\frac{|x|}{|X_1|}\right)^\alpha}}{|X_1|^\alpha}\right] = -\frac{\alpha}{2|x|}\frac{\partial}{\partial q}E\left[e^{-q\left(\frac{|x|}{|X_1|}\right)^\alpha}\right]. \tag{1.32}$$

1.2.2 Sur les temps d'atteinte

Dans tout ce paragraphe, X est un processus de Lévy symétrique stable d'indice $\alpha \in]1,2]$.

Remarque 1.10. Pour $0 < \beta < 1$, notons $\mathcal{S}_\beta$ une variable stable unilatérale dont la transformée de Laplace est donnée par :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{t}{2}\mathcal{S}_\beta\right)\right] = \exp(-t^\beta), \qquad t \geq 0,$$

c'est-à-dire, $\mathcal{S}_\beta = 2\mathcal{T}_\beta$, où $\mathcal{T}_\beta$ est une variable stable unilatérale standard d'indice β. Alors, pour $a > 0$:

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\mathcal{S}_\beta^a}\right] = \frac{1}{\Gamma(a)}\,\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} t^{a-1}\,\exp(-t\,\mathcal{S}_\beta)\,dt\right] = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty} t^{a-1}\,\exp(-(2t)^\beta)\,dt \tag{1.33}$$

$$= \frac{1}{2^a\,\beta\,\Gamma(a)}\int_0^{+\infty} v^{\frac{a}{\beta}-1}\,\exp(-v)\,dv = \frac{\Gamma\left(\frac{a}{\beta}\right)}{2^a\,\beta\,\Gamma(a)}.$$

Proposition 1.11. *Soit H_α la variable positive telle que*

$$\forall x \geq 0,\ \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}_{\frac{\alpha}{2}}}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\,\mathcal{S}_{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}_{\frac{\alpha}{2}}}}\right]\ \mathbb{P}[H_\alpha \geq x].$$

Alors :

$$T_{\{x\}} \overset{(loi)}{=} \frac{x^\alpha}{c\,(H_\alpha)^\alpha\,\beta_{1-\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}}}. \tag{1.34}$$

Remarque 1.12. Voir aussi lemmes 2.16 et 2.17 et théorème 5.3 dans [46].

Remarque 1.13. Dans [37], Peskir donne un développement en série pour la densité de la loi de $T_{\{x\}}$ dans le cas où X est un processus de Lévy stable d'indice $\alpha \in]1,2[$, sans sauts négatifs (cas spectralement positif).

Remarque 1.14. Par définition,

$$\mathbb{P}[H_\alpha^2 \geq y] = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\Gamma(1+1/\alpha)}\ \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}_{\frac{\alpha}{2}}}}\mathbf{1}_{\{2\,\mathbf{e}\,\mathcal{S}_{\frac{\alpha}{2}} > y\}}\right],$$

et donc,

$$\mathbb{P}\left[H_\alpha^2 \in dy\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\Gamma(1+1/\alpha)}\ \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}_{\frac{\alpha}{2}}}}(2\,\mathbf{e}\,\mathcal{S}_{\frac{\alpha}{2}} \in dy)\right],$$

où $\mathbf{e}$ désigne une variable exponentielle standard, i.e. une variable gamma de paramètre 1, indépendante de $\mathcal{S}_{\frac{\alpha}{2}}$. L'égalité en loi (1.34) équivaut donc à

$$\mathbb{E}[g(T_{\{x\}})] = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\Gamma(1+1/\alpha)}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{\mathcal{S}_{\frac{\alpha}{2}}}}\,g\left(\frac{x^\alpha}{c\,\beta_{1-\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}}\,(2\mathbf{e}\,\mathcal{S}_{\frac{\alpha}{2}})^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right], \tag{1.35}$$

pour toute fonction g mesurable positive ou bornée, où $\beta_{1-\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}}$ désigne une variable béta de paramètres $1-\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\alpha}$ indépendante de $\mathbf{e}$ et $\mathcal{S}_{\frac{\alpha}{2}}$. En particulier, grâce à (1.33), on a, pour $a \in]-1-\frac{1}{\alpha}; 2-\frac{1}{\alpha}[$:

$$\mathbb{E}[(T_{\{x\}})^a] = \frac{x^{\alpha a}\,\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\frac{\alpha a}{2})\,\Gamma(1-\frac{1}{\alpha}-a)\,\Gamma(a+\frac{1}{\alpha})}{c^a\,2^{\alpha a}\,\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})\,\Gamma(\frac{1}{\alpha})\ \Gamma(\frac{1+\alpha a}{2})\,\Gamma(1-a)}. \tag{1.36}$$

Par ailleurs, si X désigne le processus symétrique stable d'indice α d'exposant caractéristique $\psi(\lambda) = c|\lambda|^\alpha$, on a

$$\text{sous } \mathbb{P}_0,\ \ X_1 \overset{(loi)}{=} c^{\frac{1}{\alpha}}\,B\left(\mathcal{S}_{\frac{\alpha}{2}}\right),$$

où $(B(s); s \geq 0)$ est un mouvement brownien standard, indépendant de $\mathcal{S}_{\frac{\alpha}{2}}$. Il s'ensuit :

$$p_1(x) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}\,\sqrt{2\pi\mathcal{S}_{\frac{\alpha}{2}}}}\ \exp\left(-\frac{x^2}{2\,c^{\frac{2}{\alpha}}\,\mathcal{S}_{\frac{\alpha}{2}}}\right)\right], \tag{1.37}$$

et

$$\forall x \geq 0,\ \mathbb{P}[H_\alpha \geq x] = \frac{p_1\left(x\,c^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{p_1(0)} = \frac{\pi\ c^{\frac{1}{\alpha}}\,p_1\left(x\,c^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}. \tag{1.38}$$

Preuve. D'après [6] (Chap. VIII, lemme 13, p. 230), on a :

$$\mathbb{P}[T_{\{x\}} < t] = \frac{\sin(\frac{\pi}{\alpha})}{\pi\, p_1(0)} \int_0^t p_{t-s}(x)\, s^{\frac{1}{\alpha}-1}\, ds = \frac{c^{\frac{1}{\alpha}}\, \sin(\frac{\pi}{\alpha})}{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})} \int_0^t p_{t-s}(x)\, s^{\frac{1}{\alpha}-1}\, ds \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned}
(\text{scaling}) &= \frac{c^{\frac{1}{\alpha}}\, \sin(\frac{\pi}{\alpha})}{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})} \int_0^t p_1\left(x\,(t-s)^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\, (t-s)^{-\frac{1}{\alpha}}\, s^{\frac{1}{\alpha}-1}\, ds \\
&= \frac{c^{\frac{1}{\alpha}}\, \sin(\frac{\pi}{\alpha})}{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})} \int_0^1 p_1\left(x\,(t(1-u))^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\, (1-u)^{-\frac{1}{\alpha}}\, u^{\frac{1}{\alpha}-1}\, du \\
&= \frac{\pi\; c^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}\, \mathbb{E}\left[p_1\left(\frac{x}{\left(t\,\beta_{1-\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right] = \mathbb{P}\left[H_\alpha \geq \frac{x}{\left(tc\,\beta_{1-\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\right] = \mathbb{P}\left[\frac{x^\alpha}{c\,H_\alpha^\alpha\,\beta_{1-\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}}} \leq t\right],
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Remarque 1.15. Grâce aux égalités (1.33) et (1.36), l'identité en loi (1.34) se traduit encore (en égalant les moments des deux membres de la premiére égalité en loi) :

$$x^\alpha\, \frac{\Gamma_{\frac{1}{\alpha}}}{c\,\Gamma_{1-\frac{1}{\alpha}}} \overset{(loi)}{=} T_{\{x\}}(\mathcal{S}_{\frac{\alpha}{2}})^{\frac{\alpha}{2}}\, |\mathcal{N}|^\alpha \overset{(loi)}{=} T_{\{x\}}\, |\hat{X}_\alpha(1)|^\alpha \overset{(loi)}{=} |\hat{X}_\alpha(T_{\{x\}})|^\alpha, \tag{1.40}$$

où $(\hat{X}_\alpha(u); u \geq 0)$ désigne un processus symétrique stable d'indice α standard ($c = 1$), et où, dans chaque membre, les variables aléatoires considérées sont indépendantes ($\mathcal{N}$ désigne une variable normale centrée réduite et pour $\gamma > 0$, Γ_γ désigne une variable gamma de paramètre γ).

Remarque 1.16. Il est clair, à partir de (1.34), que $T_{\{x\}}$ admet une densité, qu'on notera $\rho_{T_{\{x\}}}$. En plus, à partir de (1.16), (1.20) et (1.30) on montre aisément que :

$$p_t(x) = \frac{1}{c^{1/\alpha}\,\alpha\,\sin(\frac{\pi}{\alpha})\Gamma(1-1/\alpha)} t^{1-1/\alpha} \int_0^1 v^{-1/\alpha} \rho_{T_{\{x\}}}(t(1-v))dv, \tag{1.41}$$

d'où :

$$p_t(x) = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\, c^{1/\alpha}\,(\alpha-1)}\, t^{1-1/\alpha}\, \mathbb{E}\left[\rho_{T_{\{x\}}}(t\,\beta_{1,1-1/\alpha})\right].$$

Remarque 1.17. Dans le cas brownien, on a le cas particulier de l'identité de Kendall (voir [13]) :

$$p_t(x) = \frac{t}{x} \rho_{T_{\{x\}}}(t).$$

Chapitre 2

Autour de la théorie des fluctuations

2.1 Quelques résultats de base

Soit $X = (X_t, t \geq 0)$ un processus de Lévy d'exposant caractéristique ψ.

On pose pour $t \geq 0$:

$$S_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s, \quad I_t = \inf_{0 \leq s \leq t} X_s, \quad T_t = \sup\{s \leq t : X_s = S_t\} \text{ et } A_t^+ = \int_0^t 1_{\{X_s > 0\}} ds,$$

et pour $x > 0$:

$$T_{[x,+\infty[} = \inf\{s > 0 : X_s \geq x\} \text{ et } K_x = X_{T_{[x,+\infty[}} - x.$$

Dans la suite $\mathbf{e}_\gamma$ désignera une variable exponentielle de paramètre γ indépendante de X.

On s'intéresse aux lois conjointes de (S_t, X_t, T_t) (voir [28] pour la loi du couple (S_t, X_t)), (X_t, A_t^+) et $(T_{[x,+\infty[}, X_{T_{[x,+\infty[}})$ (voir [27]), et à de possibles liens entre elles.

Introduisons tout d'abord quelques notations qui nous seront utiles pour la suite. Pour $q > 0$, $\nu \geq 0$, $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ et $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, on définit :

$$\psi_q^+(\lambda) = \exp\left(- \int_0^{+\infty} (e^{\lambda x} - 1) d_x \Big(\int_0^{+\infty} u^{-1} e^{-qu} P(X_u > x) du \Big) \right), \tag{2.1}$$

$$\psi_q^-(\mu) = \exp\left(\int_{-\infty}^{0} (e^{\mu x} - 1) d_x \Big(\int_0^{+\infty} u^{-1} e^{-qu} P(X_u < x) du \Big) \right), \tag{2.2}$$

et

$$I(q, \nu) = \exp\left(\int_0^{+\infty} (e^{-(q+\nu)u} - e^{-qu}) u^{-1} P(X_u \geq 0) du \right). \tag{2.3}$$

On s'appuiera sur la proposition suivante qui rassemble une partie des résultats obtenus par Pecherskii et Rogozin dans [36] :

Proposition 2.1 ([36]). *Pour tout $\gamma > 0$, on a :*

1. *Si* $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$, $\operatorname{Re}\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$ *:*
$$E[\exp(\lambda S_{\mathbf{e}_\gamma} - \mu(S_{\mathbf{e}_\gamma} - X_{\mathbf{e}_\gamma}) - \nu T_{\mathbf{e}_\gamma})] = \psi^+_{(\gamma+\nu)}(\lambda)\ \psi^-_\gamma(\mu)\ I(\gamma,\nu). \tag{2.4}$$
2. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu \geq 0$ *:*
$$E[\exp(i\lambda X_{\mathbf{e}_\gamma} - \nu A^+_{\mathbf{e}_\gamma})] = \psi^+_{(\gamma+\nu)}(i\lambda)\ \psi^-_\gamma(i\lambda)\ I(\gamma,\nu). \tag{2.5}$$
3. *Si* $\lambda > 0$, $\mu > 0$ *:*
$$E[\exp(-\lambda T_{[\mathbf{e}_\gamma,+\infty[} - \mu K_{\mathbf{e}_\gamma}] = \frac{\gamma}{\gamma-\mu}\left(1 - \frac{\psi^+_\lambda(-\gamma)}{\psi^+_\lambda(-\mu)}\right). \tag{2.6}$$

Remarque 2.2. On montre aisément à partir de (2.4) que les couples $(S_{\mathbf{e}_\gamma}, T_{\mathbf{e}_\gamma})$ et $(S_{\mathbf{e}_\gamma} - X_{\mathbf{e}_\gamma}, \mathbf{e}_\gamma - T_{\mathbf{e}_\gamma})$ sont indépendants. Ce résultat a été démontré par Greenwood et Pitman dans [26] à l'aide de la théorie des excursions.

Remarque 2.3. Il découle de la définition de ψ^+_γ et ψ^-_γ que :
$$\psi^+_\gamma(i\lambda)\ \psi^-_\gamma(i\lambda) = \frac{\gamma}{\gamma+\psi(\lambda)}. \tag{2.7}$$
D'autre part, il a été démontré par Rogozin dans [41] que :
$$\text{Si } \operatorname{Re}\lambda \leq 0, \operatorname{Re}\mu \geq 0, \qquad \psi^+_\gamma(\lambda) = E[\exp(\lambda S_{\mathbf{e}_\gamma})] \quad \text{et} \quad \psi^-_\gamma(\mu) = E[\exp(\mu I_{\mathbf{e}_\gamma})], \tag{2.8}$$
et donc que la représentation de $\gamma(\gamma+\psi(\lambda))^{-1}$ dans (2.7) est une factorisation indéfiniment divisible.

Maintenant, si on prend $\nu = 0$ dans (2.5), du fait que $E[\exp(i\lambda X_{\mathbf{e}_\gamma})] = \gamma(\gamma+\psi(\lambda))^{-1}$, on retrouve (2.7).

En plus, à partir de (2.4), on récupère la première égalité dans (2.8), mais aussi :
$$\text{Si } \operatorname{Re}\mu \geq 0 : \qquad \psi^-_\gamma(\mu) = E[\exp(\mu(X_{\mathbf{e}_\gamma} - S_{\mathbf{e}_\gamma}))]. \tag{2.9}$$
Ainsi, comme dans [41], on trouve que l'identité (2.7) est une factorisation indéfiniment divisible de $\gamma(\gamma+\psi(\lambda))^{-1}$. On trouve aussi, en comparant (2.8) et (2.14), que $I_{\mathbf{e}_\gamma} \overset{(loi)}{=} X_{\mathbf{e}_\gamma} - S_{\mathbf{e}_\gamma}$.

Remarque 2.4. La formule (2.5) a été obtenue dans [36], après avoir montré que pour $t > 0$, $(X_t, T_t) \overset{(loi)}{=} (X_t, A^+_t)$, en remplaçant λ et μ dans (2.4) par $i\lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.5. On peut trouver la formule (2.6) dans [6] (chapitre VI, exercice 1, p.182) exprimée sous la forme suivante :

$$\forall \beta, \theta, \lambda > 0, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda a} E(\exp(-\beta T_{[a,+\infty[} - \theta X_{T_{[a,+\infty[}}))da = \frac{\kappa(\beta, \lambda+\theta) - \kappa(\beta,\theta)}{\lambda \kappa(\beta, \lambda+\theta)}, \quad (2.10)$$

où $\kappa(\cdot,\cdot)$ est défini par :

$$\exp\{-\kappa(\beta,\theta)\} = E(\exp(-\beta \bar{\tau}_1 - \theta S_{\bar{\tau}_1})), \quad (2.11)$$

$\bar{\tau}$ désignant l'inverse continu à droite du temps local en 0 du processus $S - X$.

On passe facilement de (2.6) à (2.10). À l'aide de la formule suivante ([6], chapitre VI, corollaire 10, p. 165) :

$$\kappa(\beta,\theta) = \kappa(1,0)\exp\Big(\int_0^{+\infty} dt \int_{[0,+\infty[} (e^{-t} - e^{-\beta t - \theta x})t^{-1} P(X_t \in dx)\Big), \quad (2.12)$$

on montre que pour $q, \lambda > 0$, on a :

$$\psi_q^+(-\lambda) = \frac{\kappa(q,0)}{\kappa(q,\lambda)}.$$

Dans le cas d'un processus stable d'indice α, le résultat suivant jouera un rôle clé :

Proposition 2.6 ([6], chapitre VIII, proposition 2, p.219)**.** *Soit* $\rho = P(X_1 > 0)$. *Si* $\rho \in]0,1[$, *alors il existe* $k > 0$ *tel que :*

$$P(S_1 \le x) \sim k x^{\alpha\rho} \quad \textit{quand} \quad x \to 0+. \quad (2.13)$$

Remarque 2.7. Voir [10] et[11] pour des versions plus précises de ce résultat.

2.2 Sur la loi de $(T_{[x,+\infty[}, X_{T_{[x,+\infty[}})$

2.2.1 Le cas général

Dans ce paragraphe, on cherche à exprimer la transformée de Laplace de la loi du couple $(T_{[x,+\infty[}, X_{T_{[x,+\infty[}})$, pour $x > 0$.

La formule (2.6) nous donne une expression de la transformée de Laplace de la quantité qui nous intéresse. On est donc ramené à inverser cette transformée de Laplace.
Notons d'abord que pour $\gamma > \mu > 0$, on a :

$$\frac{1}{\gamma - \mu} = \int_0^{+\infty} e^{-(\gamma-\mu)x} dx \quad \text{et} \quad \frac{\gamma}{\gamma-\mu} = 1 + \frac{\mu}{\gamma - \mu}.$$

D'autre part, de (2.8), on a pour $\gamma, \lambda > 0$:

$$\psi_\gamma^+(-\lambda) = E[\exp(-\lambda S_{\mathbf{e}_\gamma})] = \int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda z} P(S_{\mathbf{e}_\gamma} \le z)\, dz, \quad (2.14)$$

et donc, (2.6) devient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} e^{-\gamma x}\, E[\,\exp(-\lambda T_{[x,+\infty[} - \mu K_x)]\, dx \\
&\qquad = \frac{1}{\gamma-\mu} - \frac{1}{\psi_\lambda^+(-\mu)}\left(\frac{\gamma}{\gamma-\mu}\int_0^{+\infty} e^{-\gamma z} P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \le z)dz\right) \\
&\qquad = \int_0^{+\infty} e^{-\gamma x}\left(e^{\mu x} - \frac{P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \le x)}{\psi_\lambda^+(-\mu)}\right) dx - \frac{I(\gamma,\lambda,\mu)}{\psi_\lambda^+(-\mu)}, \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

où :

$$I(\gamma,\lambda,\mu) = \mu \int_0^{+\infty} P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \le z)\left(\int_0^{+\infty} e^{-\gamma(y+z)} e^{\mu y} dy\right) dz.$$

Notons qu'à l'aide du changement de variables $v = z$, $x = y + z$ et du théorème de Fubini, on obtient :

$$I(\gamma,\lambda,\mu) = \mu \int_0^{+\infty} e^{-(\gamma-\mu)x}\left(\int_0^{x} e^{-\mu v} P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \le v)dv\right) dx.$$

Si on injecte cela dans (2.15), en utilisant (2.14), on trouve :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} E[\exp(-\lambda T_{[x,+\infty[} - \mu K_x)]dx = \frac{1}{\psi_\lambda^+(-\mu)} \int_0^{+\infty} e^{-(\gamma-\mu)x} J(\mu,\lambda;x)dx, \qquad (2.16)$$

où :

$$J(\mu,\lambda;x) = \int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu v} P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \le v)dv - e^{-\mu x} P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \le x). \qquad (2.17)$$

On a donc :

$$E[\exp(-\lambda T_{[x,+\infty[} - \mu K_x)] = \frac{e^{\mu x}}{E\left[e^{-\mu S_{\mathbf{e}_\lambda}}\right]} J(\mu,\lambda;x). \qquad (2.18)$$

Notons maintenant que :

$$\begin{aligned}
J(\mu,\lambda;x) &= E\left[\int_{x\vee S_{\mathbf{e}_\lambda}}^{+\infty} \mu e^{-\mu v} dv\right] - e^{-\mu x} P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \le x) \\
&= E\left[e^{-\mu(x\vee S_{\mathbf{e}_\lambda})}\right] - e^{-\mu x} P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \le x),
\end{aligned}$$

et donc :

$$J(\mu,\lambda;x) = E\left[e^{-\mu S_{\mathbf{e}_\lambda}} 1_{\{S_{\mathbf{e}_\lambda} \ge x\}}\right]. \qquad (2.19)$$

On obtient donc :

Théorème 2.8. *Pour tout $\lambda, \mu > 0$ et $x \ge 0$:*

$$E[\exp(-\lambda T_{[x,+\infty[} - \mu X_{T_{[x,+\infty[}})] = \frac{E\left[e^{-\mu S_{\mathbf{e}_\lambda}} 1_{\{S_{\mathbf{e}_\lambda} \ge x\}}\right]}{E\left[e^{-\mu S_{\mathbf{e}_\lambda}}\right]}. \qquad (2.20)$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de (2.18) et (2.19). □

2.2.2 Le cas stable

Désormais dans ce paragraphe, on suppose que X est un processus de Lévy stable d'indice $\alpha \in]1,2]$. On note le coefficient de positivité :

$$\rho = P(X_1 \geq 0).$$

On sait que dans ce cas, $\rho \in [1-1/\alpha, 1/\alpha]$ (voir [6], chapitre VIII), en particulier $\rho \in]0,1[$. Le cas $\rho = 1-1/\alpha$, correspond au cas spectralement positif (il n'y a pas de sauts négatifs) et le cas $\rho = 1/\alpha$, au cas spectralement négatif (il n'y a pas de sauts positifs).

Scaling pour $S_{\mathbf{e}_\lambda}$ et quelques résultats asymptotiques

Dans le théorème 2.8, il apparaît un lien entre la variable aléatoire $S_{\mathbf{e}_\lambda}$ et la loi conjointe de $\left(T_{[x,+\infty[}, X_{T_{[x,+\infty[}}\right)$. Dans ce paragraphe, on montre comment la propriété de scaling permet d'étudier le comportement asymptotique de certaines quantités associées à $S_{\mathbf{e}_\lambda}$.

Dans [39], Ray donne une expression de la densité de la loi de $X_{T_{[x,+\infty[}}$ dans le cas symétrique. Dans [11], Bingham généralise ce résultat au cas non spectralement négatif. Nous allons retrouver ce résultat, à l'aide des propriétés asymptotiques obtenues, comme un corollaire de la formule (2.20).

Lemme 2.9 (Scaling)**.** *Pour tout $\lambda, \mu > 0$ et $x \geq 0$:*

(i) $P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \leq x) = P\left(S_{\mathbf{e}} \leq x\lambda^{1/\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-v} P\left(S_1 \leq \frac{x\lambda^{1/\alpha}}{v^{1/\alpha}}\right) dv.$

(ii) $E\left[e^{-\mu S_{\mathbf{e}_\lambda}}\right] = E\left[e^{-\frac{\mu}{\lambda^{1/\alpha}} S_{\mathbf{e}}}\right] = \int_0^{+\infty} e^{-v} P\left(S_{\mathbf{e}} \leq \frac{v\lambda^{1/\alpha}}{\mu}\right) dv.$

Démonstration. Soient $\lambda, \mu > 0$ et $x \geq 0$.
(i) On a :

$$\begin{aligned} P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \leq x) &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} P(S_u \leq x) du \\ \text{(changement de variable } \lambda u = v) &= \int_0^{+\infty} e^{-v} P(S_{v/\lambda} \leq x) dv \\ \text{(scaling)} &= \int_0^{+\infty} e^{-v} P\left(S_1 \leq \frac{x\lambda^{1/\alpha}}{v^{1/\alpha}}\right) dv, \end{aligned}$$

d'où (i).

(ii) D'après (2.14) et (i) :

$$\begin{aligned} E\left[e^{-\mu S_{\mathbf{e}_\lambda}}\right] &= \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu z} P\left(S_{\mathbf{e}} \leq z\lambda^{1/\alpha}\right) dz \\ \text{(changement de variable } \mu z = v) &= \int_0^{+\infty} e^{-v} P\left(S_{\mathbf{e}} \leq \frac{v\lambda^{1/\alpha}}{\mu}\right) dv, \end{aligned}$$

d'où (ii). □

Proposition 2.10. *Il existe $k^* > 0$ tel que :*

(i) $P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \leq x) \sim k^*\, x^{\alpha\rho}\, \lambda^\rho$ *quand* $\lambda \to 0+$.

(ii) $\int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu v} P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \leq v) dv \sim k^* \left(\int_{\mu x}^{+\infty} e^{-y} y^{\alpha\rho} dy \right) \mu^{-\alpha\rho} \lambda^\rho$ *quand* $\lambda \to 0+$.

(iii) $E\left[e^{-\mu S_{\mathbf{e}_\lambda}}\right] \sim k^*\, \Gamma(1+\alpha\rho)\, \mu^{-\alpha\rho}\, \lambda^\rho$ *quand* $\lambda \to 0+$.

(iv) $E\left[e^{-\mu S_{\mathbf{e}_\lambda}} 1_{\{S_{\mathbf{e}_\lambda} \geq x\}}\right] \sim k^* \alpha\rho \left(\int_{\mu x}^{+\infty} e^{-y} y^{\alpha\rho - 1} dy \right) \mu^{-\alpha\rho} \lambda^\rho$ *quand* $\lambda \to 0+$.

Démonstration.

(i) À l'aide du théorème de convergence dominée et de la proposition 2.6, on déduit du lemme 2.9 (i) que :

$$\frac{P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \leq x)}{\lambda^\rho} = \int_0^{+\infty} e^{-v} \frac{P\left(S_1 \leq \frac{x\lambda^{1/\alpha}}{v^{1/\alpha}}\right)}{\lambda^\rho} dv \underset{\lambda \to 0+}{\longrightarrow} k\, \Gamma(1-\rho)\, x^{\alpha\rho}.$$

Il suffit donc de choisir $k^* = k\, \Gamma(1-\rho)$ pour terminer la démonstration de (i).

(ii) En appliquant le théorème de convergence dominée, on déduit de (i) :

$$\frac{\int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu v} P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \leq v) dv}{\lambda^\rho} \underset{\lambda \to 0+}{\longrightarrow} k^* \int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu v} v^{\alpha\rho} dv,$$

et (ii) découle du changement de variables $y = \mu v$.

(iii) Il suffit de prendre $x = 0$ dans (ii).

(iv) C'est une conséquence de (i) et (ii), en utilisant les formules (2.17) et (2.19). □

Maintenant, on est en mesure de retrouver la loi de $X_{T_{[x,+\infty[}}$.

Corollaire 2.11 ([39], [11])**.** *Si $\alpha\rho < 1$, on a :*

$$X_{T_{[x,+\infty[}} \overset{(loi)}{=} \frac{x}{\beta_{\alpha\rho, 1-\alpha\rho}}, \tag{2.21}$$

c'est-à-dire que :

$$P(X_{T_{[x,+\infty[}} \in dy) = \rho(x,y) dy, \text{ avec } \rho(x,y) = \frac{\sin(\pi\alpha\rho)}{\pi} \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y-x}\right)^{\alpha\rho} 1_{]x,\infty[}(y).$$

Démonstration. Si on fait tendre λ vers $0+$ dans (2.20), on trouve à l'aide de la proposition

2.10 :

$$\begin{aligned}
E[\exp(-\mu X_{T_{[x,+\infty[}})] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha\rho)} \int_{\mu x}^{+\infty} e^{-y} y^{\alpha\rho-1} dy \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha\rho)}{\pi} \int_{\mu x}^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} e^{-y(v+1)} v^{-\alpha\rho} dv \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha\rho)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\mu x(v+1)}}{v+1} v^{-\alpha\rho} dv \quad \text{(théorème de Fubini)} \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha\rho)}{\pi} \int_0^1 e^{-\mu x/z} z^{\alpha\rho-1} (1-z)^{-\alpha\rho} dz \quad \text{(changement} \\
&\qquad \text{de variables } z = 1/(v+1)),
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Remarque 2.12. De même, la loi de K_x est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, sa densité étant donnée par :

$$\rho_{K_x}(y) = \rho(x, x+y) = \frac{\sin(\pi\alpha\rho)}{\pi} \frac{1}{(y+x)} \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha\rho} 1_{]0,\infty[}(y).$$

Remarque 2.13. Doney et Kyprianou dans [19] trouvent une expression pour la loi conjointe de cinq variables aléatoires liées aux fluctuations d'un processus de Lévy. Cette expression leur permet, dans le cas particulier des processus stables, de calculer la densité de la loi conjointe du triplet $(X_{T_{[x,+\infty[}} - x,\, x - X_{T_{[x,+\infty[}-}, x - S_{T_{[x,+\infty[}-})$. Plus précisément pour $y \in [0, x]$, $v \geq y$ et $u > 0$:

$$\begin{aligned}
&P(X_{T_{[x,+\infty[}} - x \in du, x - X_{T_{[x,+\infty[}-} \in dv, x - S_{T_{[x,+\infty[}-} \in dy) \\
&\qquad = \frac{\sin(\pi\alpha\rho)}{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha\rho)\Gamma(\alpha(1-\rho))} \frac{(x-y)^{\alpha\rho-1}(u-y)^{\alpha(1-\rho)-1}}{(v+u)^{1+\alpha}} \, dy\, dv\, du.
\end{aligned}$$

Ce résultat a été lui même généralisé dans [33].

Une loi asymptotique

Pour $x, h > 0$, on considère la variable aléatoire T_x^h qui a pour loi :

$$P(T_x^h \in \cdot\,) = P(T_{[x,+\infty[} \in \cdot \mid K_x \leq h).$$

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au comportement asymptotique, quand h tend vers 0+, des variables T_x^h. Pour cela, on commence par calculer la taille asymptotique des évènements $\{K_x \leq h\}$.

Lemme 2.14. *On a pour tout $x > 0$:*

$$\frac{P(X_{T_{[x,+\infty[}} \leq x+h)}{h^{1-\alpha\rho}} \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} \frac{\sin(\pi\alpha\rho)}{\pi(1-\alpha\rho)}\, x^{\alpha\rho-1}. \tag{2.22}$$

Démonstration. D'après le corollaire 2.11, on a :

$$\begin{aligned} P(X_{T_{[x,+\infty[}} \leq x+h) &= \frac{\sin(\pi\alpha\rho)}{\pi} \int_x^{x+h} \frac{1}{y}\left(\frac{x}{y-x}\right)^{\alpha\rho} dy \\ &= \frac{\sin(\pi\alpha\rho)}{\pi} \; x^{\alpha\rho} h^{1-\alpha\rho} \int_0^1 \frac{1}{(uh+x)u^{\alpha\rho}} du \quad \text{(changement} \\ &\qquad \text{de variable } u = (y-x)/h). \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit en divisant des deux côtés par $h^{1-\alpha\rho}$ et en appliquant le théorème de convergence dominée. □

Proposition 2.15. *Pour tout $\lambda > 0$, la variable aléatoire $S_{\mathbf{e}_\lambda}$ est absolument continue, sa densité f_λ pouvant s'exprimer comme :*

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda\alpha}{x} E\left[T_{[x,+\infty[} \exp(-\lambda T_{[x,+\infty[})\right], \qquad x > 0. \tag{2.23}$$

Démonstration. Si on fait μ tendre vers 0+ dans (2.20), on obtient que :

$$P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \leq x) = 1 - E\left[\exp(-\lambda T_{[x,+\infty[})\right].$$

D'autre part, grâce à la propriété de scaling, on a :

$$E\left[\exp(-\lambda T_{[x,+\infty[})\right] = E\left[\exp(-\lambda x^\alpha T_{[1,+\infty[})\right].$$

Le résultat en découle. □

Maintenant, on définit la mesure de probabilité $P_\lambda^{(x)}$ par :

$$P_\lambda^{(x)}(A) = \frac{E\left[1_A \exp(-\lambda T_{[x,+\infty[})\right]}{E\left[\exp(-\lambda T_{[x,+\infty[})\right]}.$$

Lemme 2.16. *On a pour tout $\lambda, x > 0$:*

$$\frac{P_\lambda^{(x)}(X_{T_{[x,+\infty[}} - x \leq h)}{h^{1-\alpha\rho}} \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} \frac{\sin(\pi\alpha\rho)}{k^*\pi\alpha\rho(1-\alpha\rho)} \; \frac{\lambda^{-\rho} f_\lambda(x)}{P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \geq x)}, \tag{2.24}$$

où k^* est la constante qui apparaît dans la proposition 2.10.

Démonstration. Considérons $U_{\lambda,x} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, la fonction définie par :

$$U_{\lambda,x}(h) = P_\lambda^{(x)}\left(K_x \leq h\right).$$

Grâce au théorème taubérien (voir [6], p.10), le comportement de $U_{\lambda,x}$ autour de 0 est lié au comportement de sa transformée de Laplace à l'infini.
Notons maintenant que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\mu y} U_{\lambda,x}(dy) = E_\lambda^{(x)}\left[\exp(-\mu K_x)\right] = \frac{E\left[\exp(-\lambda T_{[x,+\infty[} - \mu K_x)\right]}{E\left[\exp(-\lambda T_{[x,+\infty[})\right]}. \tag{2.25}$$

D'autre part, grâce à (2.17), (2.18) et à un changement de variable, on obtient :

$$E\left[\exp(-\lambda T_{[x,+\infty[} - \mu K_x)\right] = \frac{\int_0^{+\infty} e^{-y}\left(P\left(S_{\mathbf{e}_\lambda} \le \frac{y}{\mu} + x\right) - P\left(S_{\mathbf{e}_\lambda} \le x\right)\right) dy}{E\left[e^{-\mu S_{\mathbf{e}_\lambda}}\right]}. \tag{2.26}$$

À l'aide de la proposition 2.15 et par une application du théorème de convergence dominée, on montre que :

$$\mu \int_0^{+\infty} e^{-y}\left(P\left(S_{\mathbf{e}_\lambda} \le \frac{y}{\mu} + x\right) - P\left(S_{\mathbf{e}_\lambda} \le x\right)\right) dy \underset{\mu \to +\infty}{\longrightarrow} f_\lambda(x). \tag{2.27}$$

On sait, de la partie (ii) du lemme 2.9, que :

$$E\left[e^{-\mu S_{\mathbf{e}_\lambda}}\right] = E\left[e^{-\frac{1}{\lambda^{1/\alpha}} S_{\mathbf{e}_{\mu^{-\alpha}}}}\right],$$

et donc, de la partie (iii) de la proposition 2.10, on obtient que :

$$\mu^{\alpha\rho} E\left[e^{-\mu S_{\mathbf{e}_\lambda}}\right] \underset{\mu \to +\infty}{\longrightarrow} k^* \Gamma(1+\alpha\rho)\lambda^\rho. \tag{2.28}$$

Ainsi, de (2.25), (2.26), (2.27) et (2.28), on obtient :

$$\mu^{1-\alpha\rho} \int_0^{+\infty} e^{-\mu y} U_{\lambda,x}(dy) \underset{\mu \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{k^* \Gamma(1+\alpha\rho)} \frac{\lambda^{-\rho} f_\lambda(x)}{P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \ge x)}, \tag{2.29}$$

et donc, à l'aide d'un théorème taubérien ([6], p.10), on obtient :

$$\frac{1}{h^{1-\alpha\rho}} U_{\lambda,x}(h) \underset{h \to 0+}{\longrightarrow} \frac{1}{k^* \Gamma(1+\alpha\rho)\Gamma(2-\alpha\rho)} \frac{\lambda^{-\rho} f_\lambda(x)}{P(S_{\mathbf{e}_\lambda} \ge x)}, \tag{2.30}$$

d'où le résultat. □

Proposition 2.17. *On a pour tout $\lambda, x > 0$:*

$$E\left[\exp(-\lambda T_{[x,+\infty[}) \mid K_x \le h\right] \underset{h \to 0+}{\longrightarrow} \frac{1}{k^* \alpha\rho} x^{1-\alpha\rho} \lambda^{-\rho} f_\lambda(x). \tag{2.31}$$

Démonstration. Notons que :

$$E\left[\exp(-\lambda T_{[x,+\infty[}) \mid K_x \le h\right] = \frac{P_\lambda^{(x)}(K_x \le h)}{P(K_x \le h)} E\left[\exp(-\lambda T_{[x,+\infty[})\right],$$

et donc, le résultat est une conséquence des lemmes 2.14 et 2.16. □

Lemme 2.18. *Pour tout $x > 0$:*

$$\lim_{\lambda \to 0+} \frac{1}{k^* \alpha\rho} x^{1-\alpha\rho} \lambda^{-\rho} f_\lambda(x) = 1. \tag{2.32}$$

Démonstration. On montre à l'aide de la propriété de scaling que :

$$E[T_{[x,+\infty[}\exp(-\lambda T_{[x,+\infty[})] = \int_0^{+\infty} e^{-v}(1-v)P\left(S_1 \leq \frac{x\lambda^{1/\alpha}}{v^{1/\alpha}}\right) dv,$$

et donc, grâce à (2.13), en utilisant le théorème de convergence dominée et la définition de f_λ, on trouve :

$$\begin{aligned}\lambda^{-\rho} f_\lambda(x) \underset{\lambda\to 0+}{\longrightarrow} k\,\alpha\, x^{\alpha\rho-1} \int_0^{+\infty} e^{-v}\,(1-v)\,v^{-\rho}\,dv \\ = k\,\alpha\,\rho\,\Gamma(1-\rho)\,x^{\alpha\rho-1}.\end{aligned}$$

Le résultat en découle. □

Théorème 2.19. *Pour tout $x > 0$, la suite de variables aléatoires $\{T_x^h\}_{h>0}$ converge en loi quand h tend vers $0+$ vers une variable aléatoire T_x^0 de loi donnée par :*

$$P\left(T_x^0 \leq t\right) = \frac{\sin(\pi\rho)}{k\,\pi\rho}\, x^{-\alpha\rho} E\left[\frac{T_{[x,+\infty[}\, 1_{\{T_{[x,+\infty[}\leq t\}}}{\left(t - T_{[x,+\infty[}\right)^{1-\rho}}\right].$$

Démonstration. Soient $x, h > 0$. Notons $\mathcal{L}_h^x$ la transformée de Laplace de la variable aléatoire T_x^h et $\mathcal{L}^x$ la fonction définie par :

$$\mathcal{L}^x(\lambda) = \frac{1}{k^*\alpha\rho}\, x^{1-\alpha\rho}\,\lambda^{-\rho}\, f_\lambda(x).$$

D'après la proposition 2.17, les transformées de Laplace $\mathcal{L}_h^x$ convergent ponctuellement vers la fonction $\mathcal{L}^x$. Grâce au lemme 2.18, on sait que cette fonction limite vérifie :

$$\lim_{\lambda\to 0+} \mathcal{L}^x(\lambda) = 1,$$

ce qui entraîne que la fonction $\mathcal{L}^x$ est la transformée de Laplace d'une mesure de probabilité supportée sur $\mathbb{R}_+$ (voir [17], théorème 6.6.3, p.190), qu'on notera ν_x.

Notons donc, que :

$$\frac{\mathcal{L}^x(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\int_{[0,+\infty]} e^{-\lambda y}\nu_x(dy) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y}\nu_x([0,y])\,dy, \tag{2.33}$$

et que, d'autre part :

$$\frac{\mathcal{L}^x(\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{k^*\rho}\, x^{-\alpha\rho}\,\lambda^{-\rho} E\left[T_{[x,+\infty[}\exp(-\lambda T_{[x,+\infty[})\right].$$

Maintenant, comme $\lambda^{-\rho} = \frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda z} z^{\rho-1}dz$, on obtient :

$$\frac{\mathcal{L}^x(\lambda)}{\lambda} = \frac{\sin(\pi\rho)}{k\,\pi\rho}\, x^{-\alpha\rho}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} E\left[\frac{T_{[x,+\infty[}\, 1_{\{T_{[x,+\infty[}\leq u\}}}{\left(u - T_{[x,+\infty[}\right)^{1-\rho}}\right] du. \tag{2.34}$$

Le résultat est obtenu en comparant (2.33) et (2.34). □

Absence de masses ponctuelles pour les lois de $T_{[x,+\infty[}$ et T_x^0

Dans [36] (lemme 1), il a été démontré, dans un cadre assez général, que la loi de S_t n'admet pas de masses ponctuelles, c'est-à-dire que pour tout $x \geq 0$, $P(S_t = x) = 0$. Comme en plus, $\{S_t \geq x\} = \{T_{[x,+\infty[} \leq t\} \cup \{S_t = x\}$, on a :

$$P(S_t \geq x) = P(T_{[x,+\infty[} \leq t).$$

Donc, à l'aide de la propriété de scaling, on obtient en particulier que :

$$S_1^{-\alpha} \overset{(loi)}{=} T_{[1,+\infty[}.$$

Ainsi, on voit que $T_{[1,+\infty[}$ n'admet pas de masses ponctuelles non plus (de même pour $T_{[x,+\infty[}$, par scaling). Dans le lemme suivant, on retrouve ce résultat, directement à partir de la propriété de scaling.

Proposition 2.20. *Pour tout $x, t > 0$:*

$$P(T_{[x,+\infty[} = t) = P(T_x^0 = t) = 0.$$

Démonstration. On commence par montrer le résultat pour $T_{[x,+\infty[}$. Grâce à la propriété de scaling, il suffit de montrer le résultat pour $x = 1$. Supposons, par contradiction, qu'il existe $t_0 > 0$ tel que :

$$\delta := P(T_{[1,+\infty[} = t_0) > 0.$$

Supposons maintenant qu'il existe $h_0 > 0$ tel que :

$$\eta := P(T_{[1,+\infty[} = t_0,\, K_1 > h_0) > 0,$$

dans ce cas, on a :

$$P(\forall u \in [1, 1 + h_0/2]\ :\ T_{[u,+\infty[} = t_0) > \eta,$$

et alors, pour tout $u \in [1, 1 + h_0/2]$, on a $P(T_{[u,+\infty[} = t_0) > \eta$. Ainsi, grâce à la propriété de scaling, on a que pour tout $u \in [1, 1 + h_0/2]$:

$$P(T_{[1,+\infty[} = t_0/u^{\alpha}) > \eta.$$

Autrement dit, pour tout $s \in [(2/(2 + h_0))^{\alpha} t_0, t_0]$:

$$P(T_{[1,+\infty[} = s) > \eta,$$

ce qui ne peut pas être vrai. On a donc, pour tout $h > 0$:

$$P(T_{[1,+\infty[} = t_0,\, K_1 > h) = 0.$$

Ainsi, pour tout $h > 0$:

$$0 < \delta = P(T_{[1,+\infty[} = t_0) = P(T_{[1,+\infty[} = t_0,\, K_1 \leq h) \leq P(K_1 \leq h),$$

ce qui est une contradiction, car la quantité à droite converge vers 0 quand h tend vers 0. Le résultat pour T_x^0 peut être obtenu à partir du résultat pour $T_{[x,+\infty[}$, car grâce au théorème 2.19, on a :

$$P(t - h < T_x^0 \leq t) \leq \frac{\sin(\pi\rho)}{k\,\pi\rho}\, x^{-\alpha\rho} E\left[\frac{T_{[x,+\infty[}\ 1_{\{t-h<T_{[x,+\infty[}\leq t\}}}{\left(t - T_{[x,+\infty[}\right)^{1-\rho}}\right].$$

□

Quelques raffinements autour de la convergence en loi des variables T_x^h

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction mesurable et positive. Pour $a > 0$, on définit la mesure $\mu_f^{(a)}$ sur les boréliens de $\mathbb{R}_+$ par :

$$\mu_f^{(a)}(A) = E[f(T_{[a,+\infty[})\, 1_A(K_a)].$$

Lemme 2.21. *La mesure $\mu_f^{(a)}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Démonstration. Directe à partir de l'absolue continuité de la loi de K_a (corollaire 2.11). □

On note $\psi_f^{(a)}$ la densité de la mesure $\mu_f^{(a)}$. Soit maintenant $G_f^{(a)}$ la fonction mesurable, vérifiant :

$$E[f(T_{[a,+\infty[})|K_a] = G_f^{(a)}(K_a).$$

Lemme 2.22. *On a y-p.p. :*

$$\psi_f^{(a)}(y) = \frac{\sin(\pi\alpha\rho)\, a^{\alpha\rho}}{\pi} \frac{1}{(a+y)\, y^{\alpha\rho}}\, G_f^{(a)}(y). \tag{2.35}$$

Démonstration. On a pour toute fonction g mesurable positive que :

$$E[f(T_{[a,+\infty[})\, g(K_a)] = \int_0^{+\infty} g(y)\, \psi_f^{(a)}(y)\, dy,$$

et d'autre part :

$$E[f(T_{[a,+\infty[})\, g(K_a)] = E[G_f^{(a)}(K_a)\, g(K_a)] = \int_0^{+\infty} g(y)\, G_f^{(a)}(y)\, \rho_{K_a}(y)\, dy,$$

d'où le résultat. □

Maintenant, on s'intéresse à comparer et caractériser les ensembles de fonctions suivants :

$\mathcal{H}_1^{(a)} = \{f \ : \ f$ mesurable et positive telle que : $E[f(T_a^h)] \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} E[f(T_a^0)]\,\}$

$\mathcal{H}_2^{(a)} = \{f \ : \ f$ mesurable et positive telle que $E[f(T_a^h)]$ converge quand h tend vers $0\}$

$\mathcal{H}_3^{(a)} = \{f \ : \ f$ mesurable et positive telle que : $G_f^{(a)}(h) \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} E[f(T_a^0)]\,\}$

et

$\mathcal{H}_4^{(a)} = \{f \ : \ f$ mesurable et positive telle que $G_f^{(a)}(h)$ converge quand h tend vers $0\}$.

Remarque 2.23. De la convergence en loi de T_a^h vers T_a^0 quand h tend vers 0 et de la définition des ensembles $\mathcal{H}_i^{(a)}$, on a :

$$\mathcal{C}_b^+(\mathbb{R}_+) \subset \mathcal{H}_1^{(a)} \subset \mathcal{H}_2^{(a)} \quad \text{et} \quad \{\text{constantes}\} \subset \mathcal{H}_3^{(a)} \subset \mathcal{H}_4^{(a)},$$

où $\mathcal{C}_b^+(I)$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur I, positives, continues et bornées.

Lemme 2.24. *Pour tout* $0 \leq b < c$ *:*
(i) Si $f_{|\,]b,c[} \in \mathcal{C}^+\left(]b,c[\right)$*, alors* $\liminf_{h\to 0+} E[f(T_a^h)1_{[b,c]}(T_a^h)] \geq E[f(T_a^0)1_{[b,c]}(T_a^0)]$.
(ii) Si $f_{|\,[b,c]} \in \mathcal{C}^+\left([b,c]\right)$*, alors* $f\,1_{[b,c]} \in \mathcal{H}_1^{(a)}$.

Démonstration. On supposera pour simplifier les notations que $b > 0$ (la preuve dans le cas $b = 0$ est analogue). Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on définit la fonction $\Upsilon_\varepsilon^{b,c}$ par :

$$\Upsilon_\varepsilon^{b,c}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [b+\varepsilon, c-\varepsilon] \\ \frac{x-b}{\varepsilon} & \text{si } x \in [b, b+\varepsilon[\\ \frac{c-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]c-\varepsilon, c] \\ 0 & \text{si } x < b \text{ ou } x > c. \end{cases}$$

On montre aisément que les fonctions $\Upsilon_\varepsilon^{b,c}$ convergent quand ε tend vers 0, ponctuellement et de façon croissante, vers la fonction $1_{]b,c[}$. De même, les fonctions $\Upsilon_\varepsilon^{b-\varepsilon,c+\varepsilon}$ convergent quand ε tend vers 0, ponctuellement et de façon décroissante, vers la fonction $1_{[b,c]}$.
Notons d'abord que :

$$E[f(T_a^h)1_{[b,c]}(T_a^h)] \geq E[f(T_a^h)\Upsilon_\varepsilon^{b,c}(T_a^h)]. \tag{2.36}$$

Maintenant si $f_{|\,]b,c[} \in \mathcal{C}^+\left(]b,c[\right)$, on a que $\Upsilon_\varepsilon^{b,c} f \in \mathcal{C}_b^+\left(\mathbb{R}_+\right)$. Ainsi, on trouve à partir de (2.36) que :

$$\begin{aligned} \liminf_{h\to 0+} E[f(T_a^h)1_{[b,c]}(T_a^h)] &\geq \liminf_{h\to 0+} E[f(T_a^h)\Upsilon_\varepsilon^{b,c}(T_a^h)] \\ &= E[f(T_a^0)\Upsilon_\varepsilon^{b,c}(T_a^0)]. \end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0 dans cette inégalité, on obtient à l'aide du théorème de convergence monotone que :

$$\liminf_{h\to 0+} E[f(T_a^h)1_{[b,c]}(T_a^h)] \geq E[f(T_a^0)1_{]b,c[}(T_a^0)].$$

Le résultat de (i) en découle, car la loi de T_a^0 n'a pas de masses ponctuelles.
Si en plus $f_{|\,[b,c]} \in \mathcal{C}^+\left([b,c]\right)$, en posant $f^* = f(b)\,1_{[0,b[} + f\,1_{[b,c]} + f(c)\,1_{]c,+\infty[}$, on a que $\Upsilon_\varepsilon^{b-\varepsilon,c+\varepsilon} f^* \in \mathcal{C}_b^+\left(\mathbb{R}_+\right)$. Comme de plus :

$$E[f(T_a^h)1_{[b,c]}(T_a^h)] \leq E[f^*(T_a^h)\Upsilon_\varepsilon^{b-\varepsilon,c+\varepsilon}(T_a^h)], \tag{2.37}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} \limsup_{h\to 0+} E[f(T_a^h)1_{[b,c]}(T_a^h)] &\leq \limsup_{h\to 0+} E[f^*(T_a^h)\Upsilon_\varepsilon^{b-\varepsilon,c+\varepsilon}(T_a^h)] \\ &= E[f^*(T_a^0)\Upsilon_\varepsilon^{b-\varepsilon,c+\varepsilon}(T_a^0)]. \end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient à l'aide du théorème de convergence monotone :

$$\limsup_{h\to 0+} E[f(T_a^h)1_{[b,c]}(T_a^h)] \leq E[f(T_a^0)1_{[b,c]}(T_a^0)].$$

On montre (ii) à l'aide de cette inégalité et de celle obtenue en (i). □

Lemme 2.25. *Si f est une fonction mesurable et positive, alors :*

$$\liminf_{h\to 0+} G_f^{(a)}(h) \leq \liminf_{h\to 0+} E[f(T_a^h)].$$

Si de plus, f est bornée :

$$\limsup_{h\to 0+} G_f^{(a)}(h) \geq \limsup_{h\to 0+} E[f(T_a^h)].$$

Démonstration. Soit f une fonction positive et mesurable. Grâce à la définition de $G_f^{(a)}$ et à l'expression dont on dispose pour la densité de K_a, on trouve :

$$E[f(T_{[a,+\infty[})1_{\{K_a \le h\}}] = \frac{\sin(\pi\alpha\rho)a^{\alpha\rho}}{\pi} \int_0^h \frac{1}{(a+y)y^{\alpha\rho}} G_f^{(a)}(y)dy,$$

et donc, à l'aide du changement de variable $y = uh$, on a :

$$E[f(T_a^h)] = \frac{\sin(\pi\alpha\rho)a^{\alpha\rho}}{\pi} \frac{h^{1-\alpha\rho}}{P(K_a \le h)} \int_0^h \frac{1}{(a+uh)u^{\alpha\rho}} G_f^{(a)}(uh)du. \tag{2.38}$$

Ainsi, la première assertion est obtenue à partir de cette identité, en utilisant le lemme de Fatou et le lemme 2.14.
Si de plus, f est bornée, $G_f^{(a)}$ l'est aussi. On montre la deuxième assertion, en utilisant, le lemme de Fatou (pour des fonctions uniformément intégrables) et le lemme 2.14 dans (2.38). □

Corollaire 2.26. *Si $f \in \mathcal{H}_4^{(a)}$ et f est bornée, alors $f \in \mathcal{H}_2^{(a)}$ et en plus :*

$$\lim_{h\to 0+} E[f(T_a^h)] = \lim_{h\to 0+} G_f^{(a)}(h).$$

Démonstration. Directe à partir du lemme 2.25. □

Lemme 2.27. *Si $f \in \mathcal{H}_1^{(a)}$ est telle que $\psi_f^{(a)}$ est monotone dans une voisinage de 0, alors $f \in \mathcal{H}_3^{(a)}$.*

Démonstration. Notons que :

$$\mu_f^{(a)}([0,h]) = E[f(T_a^h)]P(K_a \le h),$$

et donc si $f \in \mathcal{H}_1^{(a)}$, du lemme 2.14, on obtient :

$$\mu_f^{(a)}([0,h]) \underset{h\to 0+}{\sim} \frac{\sin(\pi\alpha\rho)a^{\alpha\rho-1}}{\pi(1-\alpha\rho)} E[f(T_a^0)]\, h^{1-\alpha\rho}.$$

Ainsi, si on suppose que $\psi_f^{(a)}$ est monotone dans un voisinage de 0, on trouve que (voir [6], théorème de densité monotone, p.10) :

$$\psi_f^{(a)}(h) \underset{h\to 0+}{\sim} \frac{\sin(\pi\alpha\rho)a^{\alpha\rho-1}}{\pi} E[f(T_a^0)]\, h^{-\alpha\rho}.$$

On obtient donc le résultat à l'aide du lemme 2.22. □

2.3 Sur l'absolue continuité de la loi de S_t

Pour $a > 0$, on considère la mesure μ_a définie sur les boréliens de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ par :

$$\mu_a(ds, dx) = P(T_{[a,+\infty[} \in ds,\ X_{T_{[a,+\infty[}} \in dx), \tag{2.39}$$

La proposition suivante nous permettra de désintégrer la loi de S_t par rapport à la loi μ_a. On étudie ensuite des questions concernant l'absolue continuité de la loi de S_t.

Proposition 2.28. *Soit $a < b$.*

(i) Le processus $\hat{X}^a = (\hat{X}^a_t \equiv X_{t+T_{[a,+\infty[}} - X_{T_{[a,+\infty[}}, t \geq 0)$ a même loi que X et est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_{T_{[a,+\infty[}}$.

(ii) $T_{[b,+\infty[} - T_{[a,+\infty[} = T_{[b-X_{T_{[a,+\infty[}},+\infty[}[\hat{X}^a]$.

(iii) Soit $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et positive (ou bornée). On a :

$$E[f(T_{[a,+\infty[}, T_{[b,+\infty[})] = \iint\limits_{[0,+\infty[\times[a,b[} E[f(s, s + T_{[b-x,+\infty[})]\mu_a(ds, dx). \tag{2.40}$$

Démonstration.

(i) C'est une application directe de la propriété de Markov forte au temps d'arrêt $T_{[a,+\infty[}$.

(ii) C'est une conséquence de la définition des temps $(T_{[z,+\infty[}, z \in \mathbb{R})$.

(iii) La démonstration est directe à partir de :

$$\begin{aligned} E[f(T_{[a,+\infty[}, T_{[b,+\infty[})] &= E[E[f(T_{[a,+\infty[}, T_{[a,+\infty[} + T_{[b,+\infty[} - T_{[a,+\infty[})/\mathcal{F}_{T_{[a,+\infty[}}]] \\ &= E[F_b(T_{[a,+\infty[}, X_{T_{[a,+\infty[}})], \end{aligned}$$

où $F_b(s, x) = E[f(s, s + T_{[b-x,+\infty[})]$. La dernière égalité découle de (i) et (ii). $\square$

Corollaire 2.29. *On a pour $a < b$:*

$$P(S_t \in]\,a, b\,]) = \iint\limits_{[0,t[\times]a,b]} P(T_{[b-x,+\infty[} \geq t - s)\mu_a(ds, dx). \tag{2.41}$$

Démonstration. Il suffit de noter que :

$$P(S_t \in]\,a, b\,]) = P(T_{[a,+\infty[} \leq t, T_{[b,+\infty[} > t),$$

et d'appliquer (2.40) avec $f(\ell, s) = 1_{[0,t]}(\ell)1_{]t,+\infty[}(s)$. $\square$

On utilise ce corollaire pour étudier le comportement asymptotique des quantités du type :

$$\frac{P(S_t \leq a + h) - P(S_t \leq a)}{h},$$

quand h tend vers 0.
On définit pour $t, \delta > 0$, les fonctions $f^{(t)}_\delta, f^{(t)} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ par :

$$f^{(t)}_\delta(s) = \frac{1_{[0,t-\delta]}(s)}{(t-s)^\rho} \quad \text{et} \quad f^{(t)}(s) = \frac{1_{[0,t]}(s)}{(t-s)^\rho}.$$

On notera aussi $G^{(a)}_t$ et $G^{(a)}_{t,\delta}$ à la place de $G^{(a)}_{f^{(t)}}$ et $G^{(a)}_{f^{(t)}_\delta}$ respectivement.

Lemme 2.30. *Si pour tout $\delta > 0$, $f^{(t)}_\delta \in \mathcal{H}^{(a)}_4$, alors pour tout $a > 0$:*

$$\liminf_{h\to 0+} \frac{P(S_t \leq a + h) - P(S_t \leq a)}{h} \geq k\,\alpha\rho\, a^{\alpha\rho-1}\, E\left[\frac{1_{\{T^0_a \leq t\}}}{(t - T^0_a)^\rho}\right].$$

Démonstration. D'après le corollaire 2.29 :

$$P(S_t \le a+h) - P(S_t \le a) = \iint\limits_{[0,t[\times]a,a+h]} P(T_{[a+h-x,+\infty[} \ge t-s)\mu_a(ds,dx).$$

Notons que la propriété de scaling entraîne :

$$\begin{aligned} P(T_{[a+h-x,+\infty[} \ge t-s) &= P(S_{t-s} \le a+h-x) \\ &= P\left(S_1 \le (a+h-x)(t-s)^{-1/\alpha}\right). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Maintenant, on considère $\varepsilon, \delta > 0$. On sait, d'après (2.13), qu'il existe $h^*(\varepsilon) > 0$, tel que pour tout $h \le h^*(\varepsilon)$:

$$P(S_1 \le h) \ge (1-\varepsilon)\, k\, h^{\alpha\rho}.$$

On remarque que pour $h \le \delta^{1/\alpha} h^*(\varepsilon)$, $x \in [a, a+h]$ et $s \in [0, t-\delta]$, on a :

$$0 \le (a+h-x)(t-s)^{-1/\alpha} \le h^*(\varepsilon),$$

et donc :

$$P(S_1 \le (a+h-x)(t-s)^{-1/\alpha}) \ge (1-\varepsilon)\, k\, \frac{(a+h-x)^{\alpha\rho}}{(t-s)^{\rho}}.$$

Ainsi d'après (2.42), pour tout $h \le \delta^{1/\alpha} h^*(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} P(S_t \le a+h) - P(S_t \le a) &\ge \iint\limits_{[0,t-\delta[\times]a,a+h]} P(T_{[a+h-x,+\infty[} \ge t-s)\mu_a(ds,dx) \\ &\ge (1-\varepsilon)\, k \iint\limits_{[0,t-\delta[\times]a,a+h]} \frac{(a+h-x)^{\alpha\rho}}{(t-s)^{\rho}} \mu_a(ds,dx) \\ &= (1-\varepsilon)\, k\, E\left[1_{\{K_a \le h\}}\, (h-K_a)^{\alpha\rho}\, \frac{1_{\{T_{[a,+\infty[} \le t-\delta\}}}{(t - T_{[a,+\infty[})^{\rho}}\right]. \end{aligned}$$

Maintenant, à partir de l'expression pour la densité de $X_{T_{[a,+\infty[}}$ (corollaire 2.11), on obtient :

$$E\left[1_{\{K_a \le h\}}\, (h-K_a)^{\alpha\rho}\, \frac{1_{\{T_{[a,+\infty[} \le t-\delta\}}}{(t - T_{[a,+\infty[})^{\rho}}\right] = \frac{\sin(\pi\alpha\rho)\, a^{\alpha\rho}}{\pi} \int_0^h \frac{(h-y)^{\alpha\rho}}{y^{\alpha\rho}(y+a)} G^{(a)}_{t,\delta}(y)dy,$$

et donc, à l'aide du changement de variable $uh = y$, on obtient :

$$\frac{P(S_t \le a+h) - P(S_t \le a)}{h} \ge (1-\varepsilon)\, k\, \frac{\sin(\pi\alpha\rho)\, a^{\alpha\rho}}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1-u}{u}\right)^{\alpha\rho} \frac{G^{(a)}_{t,\delta}(uh)}{uh+a} du.$$

Grâce au lemme 2.24 et au corollaire 2.26, on montre que la condition $f^{(t)}_\delta \in \mathcal{H}^{(a)}_4$ implique que $f^{(t)}_\delta \in \mathcal{H}^{(a)}_3$. Ainsi on trouve, à l'aide du lemme de Fatou que :

$$\liminf_{h \to 0+} \frac{P(S_t \le a+h) - P(S_t \le a)}{h} \ \ge\ (1-\varepsilon)\, k\, \alpha\rho\, a^{\alpha\rho-1}\, E\left[\frac{1_{\{T^0_a \le t-\delta\}}}{(t - T^0_a)^{\rho}}\right].$$

Le résultat s'ensuit, en faisant tendre ε et δ vers 0. □

Théorème 2.31. *Si $f^{(t)} \in \mathcal{H}_3^{(a)}$, alors :*

$$\lim_{h\to 0+} \frac{P(S_t \le a+h) - P(S_t \le a)}{h} = k\,\alpha\rho\, a^{\alpha\rho-1}\, E\left[\frac{1_{\{T_a^0 \le t\}}}{(t-T_a^0)^\rho}\right].$$

Démonstration. On supposera que :

$$E\left[\frac{1_{\{T_a^0 \le t\}}}{(t-T_a^0)^\rho}\right] < +\infty,$$

car dans le cas contraire le résultat découle du lemme 2.30.
Grâce au lemme 2.30, il reste à démontrer que :

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{P(S_t \le a+h) - P(S_t \le a)}{h} \le k\alpha\rho\, a^{\alpha\rho-1} E\left[\frac{1_{\{T_a^0 \le t\}}}{(t-T_a^0)^\rho}\right].$$

Soient $\varepsilon, H > 0$. On sait, d'après (2.13), qu'il existe $h^*(\varepsilon) > 0$, tel que pour tout $h \le h^*(\varepsilon)$:

$$P(S_1 \le h) \le (1+\varepsilon)\, k\, h^{\alpha\rho}. \tag{2.43}$$

Prenons $h < H$. On définit l'ensemble $A_h(\varepsilon)$ et les quantités $I_h(\varepsilon)$ et $J_h(\varepsilon)$ par :

$$A_h(\varepsilon) = \{(s,x) \in [0,t] \times [a,a+h] \;:\; (a+h-x)(t-s)^{-1/\alpha} \le h^*(\varepsilon)\},$$

$$I_h(\varepsilon) = \iint\limits_{[0,t[\times]a,a+h]} P(S_1 \le (a+h-x)(t-s)^{-1/\alpha})\, 1_{A_h(\varepsilon)}(s,x)\, \mu_a(ds,dx),$$

$$J_h(\varepsilon) = \iint\limits_{[0,t[\times]a,a+h]} P(S_1 \le (a+h-x)(t-s)^{-1/\alpha})\, 1_{A_h^c(\varepsilon)}(s,x)\, \mu_a(ds,dx).$$

Du corollaire 2.29, en utilisant (2.42) et la définition de $I_h(\varepsilon)$ et $J_h(\varepsilon)$, on remarque que :

$$P(S_t \le a+h) - P(S_t \le a) = I_h(\varepsilon) + J_h(\varepsilon).$$

Maintenant, de (2.43) et de la définition de $A_h(\varepsilon)$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_h(\varepsilon) &\le (1+\varepsilon)\, k \iint\limits_{[0,t[\times]a,a+h]} \frac{(a+h-x)^{\alpha\rho}}{(t-s)^\rho}\, 1_{A_h(\varepsilon)}(s,x)\, \mu_a(ds,dx) \\ &\le (1+\varepsilon)\, k\, E\left[1_{\{K_a \le h\}}\, (h-K_a)^{\alpha\rho}\, \frac{1_{\{T_{[a,+\infty[} \le t\}}}{(t-T_{[a,+\infty[})^\rho}\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, en procédant de la même façon que dans la preuve du lemme 2.30 et du fait que $f^{(t)} \in \mathcal{H}_3^{(a)}$, on montre que :

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{I_h(\varepsilon)}{h} \le (1+\varepsilon)\, k\, \alpha\rho\, a^{\alpha\rho-1} E\left[\frac{1_{\{T_a^0 \le t\}}}{(t-T_a^0)^\rho}\right]. \tag{2.44}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
J_h(\varepsilon) &\leq \frac{1}{h^*(\varepsilon)^{\alpha\rho}} \iint\limits_{[0,t[\times]a,a+h]} \frac{(a+h-x)^{\alpha\rho}}{(t-s)^{\rho}} 1_{A_h^c(\varepsilon)}(s,x)\,\mu_a(ds,dx) \\
&\leq \frac{h^{\alpha\rho}}{h^*(\varepsilon)^{\alpha\rho}} E\left[1_{\{K_a\leq h\}} 1_{A_h^c(\varepsilon)}(T_{[x,+\infty[}, X_{T_{[x,+\infty[}}) \frac{1_{\{T_{[a,+\infty[}\leq t\}}}{(t-T_{[a,+\infty[})^{\rho}}\right] \\
&\leq \frac{h^{\alpha\rho}}{h^*(\varepsilon)^{\alpha\rho}} E\left[1_{\{K_a\leq h\}} \frac{1_{\left\{t-\frac{H\alpha}{h^*(\varepsilon)^{\alpha}}<T_{[a,+\infty[}\leq t\right\}}}{(t-T_{[a,+\infty[})^{\rho}}\right] \\
&= \frac{h^{\alpha\rho}P(K_a\leq h)}{h^*(\varepsilon)^{\alpha\rho}} E\left[\frac{1_{\left\{t-\frac{H\alpha}{h^*(\varepsilon)^{\alpha}}<T_{[a,+\infty[}\leq t\right\}}}{(t-T_{[a,+\infty[})^{\rho}} \mid 1_{\{K_a\leq h\}}\right],
\end{aligned}$$

et donc, comme $f^{(t)} \in \mathcal{H}_3^{(a)}$, d'après le lemme 2.14, on obtient :

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{J_h(\varepsilon)}{h} \leq \frac{\sin(\pi\alpha\rho)}{\pi(1-\alpha\rho)h^*(\varepsilon)^{\alpha\rho}}\, a^{\alpha\rho-1} E\left[\frac{1_{\left\{t-\frac{H\alpha}{h^*(\varepsilon)^{\alpha}}<T_a^0\leq t\right\}}}{(t-T_a^0)^{\rho}}\right]. \tag{2.45}$$

Comme la loi de T_a^0 n'a pas de masses ponctuelles (proposition 2.20), on montre, à l'aide du théorème de convergence dominée, que le membre de droite de cette inégalité converge vers 0 quand H tend vers $0+$. On a donc que $\limsup_{h\to 0+} \frac{J_h(\varepsilon)}{h} = 0$.

On trouve le résultat en faisant tendre ε vers 0 dans (2.44). □

Remarque 2.32. L'article [18] rassemble la plupart des résultats obtenus dans la section 2.2. Les résultats obtenus dans la section suivante feront l'objet d'une nouvelle publication.

2.4 Sur la loi de (S_t, X_t, T_t)

Désormais dans ce chapitre, on suppose que X est un processus de Lévy stable d'indice $\alpha \in]1,2]$. On reprend les notations des paragraphes 2.1 et 2.2.2. Dans ce cadre, on trouve l'expression suivante pour la quantité $I(\gamma,\nu)$:

$$I(\gamma,\nu) = \left(\frac{\gamma}{\gamma+\nu}\right)^{\rho}. \tag{2.46}$$

Ainsi, la formule (2.4) pour $\lambda,\mu,\nu \geq 0$ devient :

$$E[\exp(-\lambda S_{\mathbf{e}_\gamma} - \mu(S_{\mathbf{e}_\gamma} - X_{\mathbf{e}_\gamma}) - \nu T_{\mathbf{e}_\gamma})] = \psi^+_{(\gamma+\nu)}(-\lambda)\psi^-_\gamma(\mu)\left(\frac{\gamma}{\gamma+\nu}\right)^{\rho}. \tag{2.47}$$

Remarque 2.33. En prenant $\lambda = \mu = 0$, dans l'identité (2.47), on obtient :

$$E[\exp(-\nu T_{\mathbf{e}_\gamma})] = \left(\frac{\gamma}{\gamma+\nu}\right)^{\rho}, \tag{2.48}$$

d'où l'on retrouve (voir aussi [6], chapitre VIII, proposition 16, p.234) :

$$P(T_u \in ds) = \rho_u(s)\,ds = \frac{\sin(\rho\pi)}{\pi}\,(u-s)^{\rho-1}\,s^{-\rho}\,1_{[0,u]}(s)ds, \tag{2.49}$$

c'est-à-dire que $u^{-1}T_u$ suit la loi $\beta_{1-\rho,\,\rho}$.

2.4.1 Sur la loi de (S_t, T_t)

Si on prend $\mu = 0$ dans (2.47), on obtient :

$$E[\exp(-\lambda S_{\mathbf{e}_\gamma} - \nu T_{\mathbf{e}_\gamma})] = \psi^+_{(\gamma+\nu)}(-\lambda)\Big(\frac{\gamma}{\gamma+\nu}\Big)^\rho, \tag{2.50}$$

d'où l'on déduit, grâce à (2.8) et (2.48) :

$$E[\exp(-\lambda S_{\mathbf{e}_\gamma} - \nu T_{\mathbf{e}_\gamma})] = E[\exp(-\lambda S_{\mathbf{e}_{\gamma+\nu}})] \times E[\exp(-\nu T_{\mathbf{e}_\gamma})]. \tag{2.51}$$

Notons pour λ, ν positifs :

$$\begin{aligned} G_\nu(u) &= E[\exp(-\nu T_u)], \\ H_\lambda(u) &= E[\exp(-\lambda S_u)], \\ \widehat{H}_\lambda(u) &= E\big[S_u \exp(-\lambda S_u)\big] \end{aligned}$$

et

$$F(\lambda, \nu; u) = E[\exp(-\lambda S_u - \nu T_u)].$$

Lemme 2.34. *Pour tout $\gamma, \lambda, \nu > 0$, on a :*

$$E[\exp(-\lambda S_{\mathbf{e}_{\gamma+\nu}})] = 1 - \frac{\lambda}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\gamma u}\frac{e^{-\nu u}}{u}\widehat{H}_\lambda(u)du. \tag{2.52}$$

Démonstration. Notons d'abord que :

$$E[\exp(-\lambda S_{\mathbf{e}_{\gamma+\nu}})] = \int_0^{+\infty} (\gamma+\nu)e^{-(\gamma+\nu)u}H_\lambda(u)du. \tag{2.53}$$

Maintenant, de la propriété de scaling, on déduit :

$$H_\lambda(u) = E\big[\exp(-\lambda u^{1/\alpha}S_1)\big],$$

d'où :

$$H'_\lambda(u) = E\big[-\frac{\lambda}{\alpha}u^{1/\alpha-1}S_1\exp(-\lambda u^{1/\alpha}S_1)\big] = -\frac{\lambda}{\alpha u}\widehat{H}_\lambda(u),$$

et donc :

$$\big(e^{-\nu u}H_\lambda(u)\big)' = -\nu e^{-\nu u}H_\lambda(u) - \frac{\lambda e^{-\nu u}}{\alpha u}\widehat{H}_\lambda(u).$$

À l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \gamma e^{-\gamma u}e^{-\nu u}H_\lambda(u)du = 1 + \int_0^{+\infty} e^{-\gamma u}(e^{-\nu u}H_\lambda(u))'du.$$

Le résultat est obtenu en injectant cette identité dans (2.53). □

Lemme 2.35. *Pour tout $\lambda, \nu > 0$ et $u \geq 0$:*

$$E\big[\exp(-\lambda S_u - \nu T_u)\big] = G_\nu(u) - \frac{\lambda}{\alpha}\int_0^u \frac{e^{-\nu s}}{s}\,\widehat{H}_\lambda(s)\,G_\nu(u-s)\,ds. \tag{2.54}$$

Démonstration. De (2.51) et (2.52), on déduit :

$$E[\exp(-\lambda S_{\mathbf{e}_\gamma} - \nu T_{\mathbf{e}_\gamma})] = \Big(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\gamma s}\frac{e^{-\nu s}}{s}\widehat{H}_\lambda(s)ds\Big) \times \Big(\int_0^{+\infty} \gamma e^{-\gamma t} G_\nu(t)dt\Big),$$

puis, à l'aide du théorème de Fubini et le changement de variables $u = s+t$, $v = s$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-\gamma u} F(\lambda,\nu;u)\,du &= \int_0^{+\infty} e^{-\gamma u} G_\nu(u)du - \frac{\lambda}{\alpha}\int_0^{+\infty} dv\,\frac{e^{-\nu v}}{v}\widehat{H}_\lambda(v)\int_v^{+\infty} e^{-\gamma u} G_\nu(u-v)du \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\gamma u} G_\nu(u)du - \frac{\lambda}{\alpha}\int_0^{+\infty} du\, e^{-\gamma u}\int_0^u \frac{e^{-\nu v}}{v}\widehat{H}_\lambda(v)\,G_\nu(u-v)\,dv.\end{aligned}$$

Le résultat en découle. □

Maintenant, en définissant :

$$\Lambda(x) = 1 - \frac{x}{\alpha}\int_0^1 \frac{\widehat{H}_x(s)}{s}(1-s)^{\rho-1}\,ds, \tag{2.55}$$

on trouve :

Lemme 2.36. *Pour tout $\lambda > 0$ et $u \geq 0$:*

$$E[\exp(-\lambda S_u)/T_u = r] = \Lambda(\lambda r^{1/\alpha}). \tag{2.56}$$

Démonstration. Notons que, par scaling :

$$G_\nu(u) = E[\exp(-\nu u T_1)] = \int_0^1 e^{-\nu u s}\rho_1(s)ds,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^u \frac{e^{-\nu s}}{s}\widehat{H}_\lambda(s)G_\nu(u-s)ds &= \int_0^u ds\,\frac{\widehat{H}_\lambda(s)}{s}\int_0^1 e^{-\nu((u-s)v+s)}\rho_1(v)dv \\ \text{(en posant : } t=s;\ r=(u-s)v+s) &= \int_0^u dt\,\frac{\widehat{H}_\lambda(t)}{t}\int_t^u e^{-\nu r}\frac{\rho_1(\frac{r-t}{u-t})}{(u-t)}\,dr \\ \text{(th. de Fubini)} &= \int_0^u dr\, e^{-\nu r}\int_0^r \frac{\widehat{H}_\lambda(t)}{t}\frac{\rho_1(\frac{r-t}{u-t})}{(u-t)}\,dt,\end{aligned}$$

et comme, pour $t < r < u$:

$$\frac{1}{(u-t)}\,\rho_1\Big(\frac{r-t}{u-t}\Big) = \rho_u(r)(r-t)^{\rho-1}r^{1-\rho},$$

on obtient :

$$\int_0^u \frac{e^{-\nu s}}{s}\widehat{H}_\lambda(s)G_\nu(u-s)ds = \int_0^u dr\,\rho_u(r)e^{-\nu r}r^{1-\rho}\int_0^r \frac{\widehat{H}_\lambda(t)}{t}(r-t)^{\rho-1}\,dt,$$

et donc, en injectant cela dans (2.54) :

$$F(\lambda,\nu;u) = \int_0^u e^{-\nu r}\rho_u(r)dr - \frac{\lambda}{\alpha}\int_0^u dr\ \rho_u(r)e^{-\nu r}r^{1-\rho}\int_0^r \frac{\widehat{H}_\lambda(t)}{t}(r-t)^{\rho-1}\ dt$$
$$= \int_0^u \rho_u(r)e^{-\nu r}\Big(1-\frac{\lambda r^{1-\rho}}{\alpha}\int_0^r \frac{\widehat{H}_\lambda(t)}{t}(r-t)^{\rho-1}\ dt\Big)dr$$

d'où, grâce à la propriété de scaling et à la définition de Λ :

$$F(\lambda,\nu;u) = \int_0^u e^{-\nu r}\Lambda(\lambda r^{1/\alpha})\rho_u(r)dr, \tag{2.57}$$

ou de façon équivalente :

$$F(\lambda,\nu;u) = E[\exp(-\nu T_u)\ \Lambda(\lambda {T_u}^{1/\alpha})], \tag{2.58}$$

d'où le résultat. □

Remarque 2.37. Remarquons que :

$$\widehat{H}_\lambda(u) = E\Bigg[\int_0^{S_u}(1-\lambda y)e^{-\lambda y}dy\Bigg]. \tag{2.59}$$

Donc à l'aide du théorème de Fubini, on obtient :

$$\widehat{H}_\lambda(u) = \int_0^{+\infty}(1-\lambda y)e^{-\lambda y}P(S_u > y)dy = \int_0^{+\infty}(1-\lambda y)e^{-\lambda y}P(T_{[y,+\infty[} \le u)dy. \tag{2.60}$$

2.4.2 Sur la loi du triplet

On définit pour λ, μ, ν positifs et $u \ge 0$:

$$E(\lambda,\mu,\nu;u) = E[\exp(-\lambda S_u - \mu(S_u - X_u) - \nu T_u)],$$
$$H^*_\mu(u) = E[\exp(\mu I_u)] \quad \text{et} \quad \widehat{H^*_\mu}(u) = E\big[I_u \exp(\mu I_u)\big].$$

On sait que le couple $(S_{\mathbf{e}_\gamma}, T_{\mathbf{e}_\gamma})$ est indépendant de $S_{\mathbf{e}_\gamma} - X_{\mathbf{e}_\gamma}$. Comme de plus $I_{\mathbf{e}_\gamma} \overset{(loi)}{=} X_{\mathbf{e}_\gamma} - S_{\mathbf{e}_\gamma}$, on a :

$$\int_0^{+\infty}\gamma e^{-\gamma u}E(\lambda,\mu,\nu;u)du = E[\exp(-\lambda S_{\mathbf{e}_\gamma} - \mu(S_{\mathbf{e}_\gamma} - X_{\mathbf{e}_\gamma}) - \nu T_{\mathbf{e}_\gamma})]$$
$$= E[\exp(-\lambda S_{\mathbf{e}_\gamma} - \nu T_{\mathbf{e}_\gamma})] \times E[\exp(\mu I_{\mathbf{e}_\gamma})]$$
$$= \Big(\int_0^{+\infty}\gamma e^{-\gamma v}F(\lambda,\nu;v)\ dv\Big) \times \Big(\int_0^{+\infty}\gamma e^{-\gamma s}H^*_\mu(s)\ ds\Big),$$

d'où :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\gamma u}E(\lambda,\mu,\nu;u)\ du = \Big(\int_0^{+\infty} e^{-\gamma v}F(\lambda,\nu;v)\ dv\Big) \times \Big(\int_0^{+\infty}\gamma e^{-\gamma s}H^*_\mu(s)\ ds\Big) \tag{2.61}$$

Lemme 2.38. *Pour tout $\lambda, \mu, \nu > 0$ et $u \geq 0$:*

$$E[\exp(-\lambda S_u - \mu(S_u - X_u) - \nu T_u)] = F(\lambda, \nu; u) + \frac{\mu}{\alpha} \int_0^u \frac{\widehat{H^*_\mu}(s)}{s} F(\lambda, \nu; u-s) ds. \quad (2.62)$$

Démonstration. En procédant de façon analogue à la preuve du lemme 2.34, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \gamma e^{-\gamma s} H^*_\mu(s) ds &= 1 + \int_0^{+\infty} e^{-\gamma u} H^{*\prime}_\mu(u) du \\
&= 1 - \frac{\mu}{\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\gamma s}}{s} \widehat{H^*_\mu}(s) ds,
\end{aligned}$$

d'où (2.61) devient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\gamma u} E(\lambda, \mu, \nu; u) du = \int_0^{+\infty} e^{-\gamma u} F(\lambda, \nu; u) du - \frac{\mu}{\alpha} K(\gamma, \lambda, \mu, \nu), \quad (2.63)$$

où :

$$K(\gamma, \lambda, \mu, \nu) = \Big(\int_0^{+\infty} e^{-\gamma v} F(\lambda, \nu; v) dv \Big) \times \Big(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\gamma s}}{s} \widehat{H^*_\mu}(s) ds \Big).$$

De façon analogue au calcul fait au début de la preuve du lemme 2.35, on obtient :

$$K(\gamma, \lambda, \mu, \nu) = \int_0^{+\infty} du\, e^{-\gamma u} \int_0^u \frac{\widehat{H^*_\mu}(s)}{s} F(\lambda, \nu; u-s) ds, \quad (2.64)$$

d'où le résultat. □

On note :

$$\Lambda^*(x) = 1 + \frac{x}{\alpha} \int_0^1 \frac{\widehat{H^*_x}(s)}{s} (1-s)^{\rho - 1}\, ds. \quad (2.65)$$

Proposition 2.39. *Pour tout $\lambda, \mu > 0$ et $u \geq 0$:*

$$E\left[\exp\left(-\lambda \left(\frac{S_u}{T_u^{1/\alpha}} \right) - \mu \left(\frac{S_u - X_u}{(u - T_u)^{1/\alpha}} \right) \right) \Big/ T_u = r \right] = \Lambda(\lambda)\, \Lambda^*(\mu). \quad (2.66)$$

Démonstration. En commençant avec le changement de variables $t = u - s$ et en utilisant (2.57), on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^u \frac{\widehat{H^*_\mu}(s)}{s} F(\lambda, \nu; u-s) ds &= \int_0^u \frac{\widehat{H^*_\mu}(u-t)}{(u-t)} F(\lambda, \nu; t) dt \\
&= \int_0^u \frac{\widehat{H^*_\mu}(u-t)}{(u-t)} \left(\int_0^t e^{-\nu r} \Lambda(\lambda r^{1/\alpha}) \rho_t(r) dr \right) dt \\
\text{(Fubini)} &= \int_0^u e^{-\nu r} \Lambda(\lambda r^{1/\alpha}) \left(\int_r^u \frac{\widehat{H^*_\mu}(u-t)}{(u-t)} \rho_t(r) dt \right) dr,
\end{aligned}$$

et maintenant, en faisant d'abord le changement de variables $v = r$; $\ell = (t-r)/(u-r)$ et puis le changement de variables $s = v$; $t = (u-v)(1-\ell)$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^u \frac{\widehat{H^*_\mu}(s)}{s} F(\lambda, \nu; u-s)ds &= \int_0^u e^{-\nu v}\Lambda(\lambda v^{1/\alpha})\left(\int_0^1 \frac{\widehat{H^*_\mu}((u-v)(1-\ell)) \;\; \ell^{\rho-1}}{(1-\ell)} d\ell\right)\rho_u(v)dv \\
&= \int_0^u e^{-\nu s}\Lambda(\lambda s^{1/\alpha})\left(\int_0^{u-s} \frac{\widehat{H^*_\mu}(t)}{t}\left(\frac{u-s}{u-s-t}\right)^{1-\rho} dt\right)\rho_u(s)ds \\
&= \int_0^u e^{-\nu s}\Lambda(\lambda s^{1/\alpha})(u-s)^{1-\rho}\left(\int_0^{u-s} \frac{\widehat{H^*_\mu}(t)}{t}(u-s-t)^{\rho-1}dt\right)\rho_u(s)ds,
\end{aligned}$$

et donc, à l'aide de (2.57), (2.62) devient :

$$E(\lambda, \mu, \nu; u) = \int_0^u e^{-\nu r}\Lambda(\lambda r^{1/\alpha})\left(1 + \frac{\mu}{\alpha}(u-s)^{1-\rho}\int_0^{u-r} \frac{\widehat{H^*_\mu}(t)}{t}(u-s-t)^{\rho-1}dt\right)\rho_u(r)dr, \tag{2.67}$$

Ainsi, à l'aide de la propriété de scaling et de la définition de Λ^*, on obtient :

$$E(\lambda, \mu, \nu; u) = \int_0^u e^{-\nu r}\Lambda(\lambda r^{1/\alpha})\Lambda^*(\mu(u-r)^{1/\alpha})\rho_u(r)dr.$$

ou de façon équivalente :

$$E(\lambda, \mu, \nu; u) = E[\exp(-\nu T_u)\Lambda(\lambda {T_u}^{1/\alpha})\Lambda^*(\mu(u-T_u)^{1/\alpha})],$$

d'où on obtient :

$$E[\exp(-\lambda S_u - \mu(S_u - X_u))/T_u = r] = \Lambda(\lambda r^{1/\alpha}) \; \Lambda^*(\mu(u-r)^{1/\alpha}). \tag{2.68}$$

Le résultat en découle. □

On peut rassembler les résultats obtenus dans le théorème suivante :

Théorème 2.40. *La loi conjointe du triplet (S_u, X_u, T_u) est caractérisée par :*

1. $P(\frac{1}{u}T_u \in ds) = \frac{\sin(\pi\rho)}{\pi}(1-s)^{\rho-1}s^{-\rho}1_{]0,1[}(s)ds,$

2. $S_u/T_u^{1/\alpha}$ *et* $(S_u - X_u)/(u-T_u)^{1/\alpha}$ *sont indépendantes entre elles et indépendantes de* T_u.

3. $E\left[\exp\left(-\lambda \frac{S_u}{T_u^{1/\alpha}}\right)\right] = \Lambda(\lambda)$ *et* $E\left[\exp\left(-\lambda \frac{(S_u-X_u)}{(u-T_u)^{1/\alpha}}\right)\right] = \Lambda^*(\lambda)$. *Les fonctions* Λ *et* Λ^* *pouvant s'exprimer comme :*

$$\Lambda(x) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha\rho}E\left[{\beta_{1,\rho}}^{1/\alpha-1} \, S_1 \, \exp(-\lambda {\beta_{1,\rho}}^{1/\alpha} S_1)\right],$$

$$\Lambda^*(x) = 1 + \frac{\lambda}{\alpha\rho}E\left[{\beta_{1,\rho}}^{1/\alpha-1} \, I_1 \, \exp(\lambda {\beta_{1,\rho}}^{1/\alpha} I_1)\right],$$

où $\beta_{1,\rho}$ *désigne une variable béta de paramétres* 1 *et* ρ, *indépendante de* X.

4. *En particulier, dans le cas symétrique, on a en plus que* $S_u/T_u^{1/\alpha}$ *et* $(S_u - X_u)/(u - T_u)^{1/\alpha}$ *ont la même loi.*

Démonstration.

1. Voir la remarque 2.33.
2. Directe à partir de la proposition 2.39.
3. Directe à partir de la proposition 2.39. Les expressions pour Λ et Λ^* sont obtenues à l'aide de leurs définitions et de la propriété de scaling.
4. C'est juste le fait que dans le cas symétrique I_1 a même loi que $-S_1$ de sorte que $\Lambda = \Lambda^*$. L'assertion est donc un cas particulier de la partie 3 de cette proposition.

$\square$

Chapitre 3

Temps locaux et théorie des excursions

3.1 Temps locaux

3.1.1 Définitions et propriétés

Dans ce chapitre, $X = (X_t; t \geq 0)$ est un processus de Lévy symétrique stable d'indice $\alpha \in]1, 2]$, d'exposant caractéristique $\psi_\alpha(\lambda) = c|\lambda|^\alpha$.

La condition (1.17) entraîne l'existence de temps locaux $(L_t^x, x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ pour le processus X (voir [6], chapitre V). En effet, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$L_t^x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{\{|X_s - x| \leq \varepsilon\}} ds, \tag{3.1}$$

où la convergence est uniforme en t sur les intervalles compacts, dans $L^2(P)$. En plus, on a la formule d'occupation :

$$\int_0^t f(X_s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) L_t^x dx. \tag{3.2}$$

D'autre part, la propriété de scaling pour X entraîne :

$$(L_{at}^x; t \geq 0, x \in \mathbb{R}) \overset{\text{(loi)}}{=} (a^{(\alpha-1)/\alpha} L_t^{x/a^{1/\alpha}}; t \geq 0, x \in \mathbb{R}), \quad a > 0. \tag{3.3}$$

On sait aussi qu'on peut trouver une version bicontinue des temps locaux de X, et même une version localement höldérienne d'ordre η, pour tout $\eta \in]0, (\alpha - 1)/2[$ (voir [1] et [2]), c'est-à-dire :

$$\forall\ 0 < \eta < \frac{\alpha - 1}{2},\ \forall T > 0,\ \exists C > 0, \qquad \sup_{0 \leq t \leq T} |L_t^x - L_t^y| \leq C|x - y|^\eta. \tag{3.4}$$

Maintenant, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathcal{N}_x = \{s \geq 0 : X_s = x\}$. Comme le complémentaire de $\overline{\mathcal{N}_x}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, on peut l'écrire comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints, qu'on appellera intervalles d'excursion de X hors de x. Dans le cas $x = 0$, on parlera simplement d'intervalles d'excursion.

Dans la suite, on notera G_x l'ensemble des extrémités gauches des intervalles d'excursion de X hors de x.

On sait que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto L_t^x$ est croissante et la mesure de Stieltjes associée dL_t^x a un support inclus dans $\overline{\mathcal{N}_x}$.

Salminen et Yor ont montré dans [42] la généralisation suivante de la formule de Tanaka :

Théorème 3.1 ([42]). *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une martingale de carré intégrable N_t^x et une constante C telles que :*

$$|X_t|^{\alpha-1} = |x|^{\alpha-1} + N_t^x + C\, L_t^x. \tag{3.5}$$

Remarque 3.2. Grâce à (3.1) et (1.31) on trouve :

$$E[L_t^0] = \int_0^t p_s(0)ds = \frac{c^{-1/\alpha}\alpha\Gamma(1+1/\alpha)}{(\alpha-1)\pi}\, t^{1-1/\alpha}. \tag{3.6}$$

3.1.2 Inverse du temps local

On considère maintenant l'inverse du temps local en 0 :

$$\tau_\ell = \inf\{u > 0 : L_u^0 > \ell\}, \quad \ell \geq 0. \tag{3.7}$$

Il est bien connu que $(\tau_\ell; \ell \geq 0)$ est un subordinateur stable d'indice $1 - 1/\alpha$ (voir [6], chapitre V et VIII). Plus précisément, on a :

$$E(e^{-\lambda\tau_\ell}) = e^{-\frac{\ell}{u^\lambda(0)}} = e^{-\frac{\ell}{c_\alpha}\lambda^{1-1/\alpha}}, \tag{3.8}$$

où $c_\alpha = \frac{c^{-1/\alpha}}{\alpha\sin(\pi/\alpha)}$.

De plus, si on pose

$$\tau_{\ell-} = \inf\{u > 0 : L_u^0 \geq \ell\} = \lim_{s\to\ell-} \tau_s, \quad \ell > 0, \tag{3.9}$$

on a (voir [6], chapitre IV, proposition 7) :

$$\tau_{L_t^0} = \inf\{s > t : X_s = 0\} \quad \text{et} \quad \tau_{L_t^0-} = \sup\{s < t : X_s = 0\}. \tag{3.10}$$

En particulier, on peut en déduire que $\tau_\ell \in \mathcal{N}_0$ et $\tau_{\ell-} \in \overline{\mathcal{N}_0}$.

D'autre part, on sait que X est continu aux extrémités des intervalles d'excursion (voir [35]). Plus précisément, on a :

$$P(\exists t > 0 : X_{t-} = 0, X_t \neq X_{t-}) = 0 \quad \text{et} \quad P(\exists t > 0 : X_t = 0, X_{t-} \neq X_t) = 0, \tag{3.11}$$

d'où, on obtient que $\tau_{\ell-} \in \mathcal{N}_0$.

3.1.3 Autour de la formule de Feynman-Kac

Dans ce paragraphe, on suppose que la condition (1.17) est vérifiée, et donc que les densités u^q existent et sont continues.

Soit μ une mesure de Radon complexe vérifiant que la r-résolvante de $|\mu|$ est finie pour un certain $r > 0$ fixé, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} u^r(y-x)\,|\mu(dy)| < +\infty. \tag{3.12}$$

À une telle mesure μ, on associe la fonctionnelle additive à valeurs complexes $\widetilde{A}^\mu$ définie par :

$$\widetilde{A}_t^\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} L_t^y\,\mu(dy).$$

Maintenant, pour une fonction f mesurable et bornée, on définit la r-résolvante de la mesure de Radon $f\mu$ par :

$$U^r(f\mu)(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)u^r(y-x)\mu(dy) = E_x\left[\int_0^{+\infty} e^{-rs} f(X_s)d\widetilde{A}_s^\mu\right], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Sous la condition additionnelle suivante :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} E_x\left[\int_0^{+\infty} e^{-rs}|\exp(-\widetilde{A}_s^\mu)|\,ds\right] < +\infty, \tag{3.13}$$

on peut définir pour toute fonction mesurable et bornée g :

$$V_\mu^r g(x) = E_x\left[\int_0^{+\infty} e^{-rs} g(X_s)\exp(-\widetilde{A}_s^\mu)\,ds\right], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Avec les définitions précédentes, on peut énoncer la formule de Feynman-Kac pour (g, μ) :

$$U^r((V_\mu^r g)\mu) = U^r g - V_\mu^r g. \tag{3.14}$$

Notons que grâce à la condition (3.13), la fonction $V_\mu^r g$ est aussi mesurable et bornée et donc tous les termes intervenant dans la formule précédente sont bien définis.

Remarque 3.3. Soient $a_0, \ldots, a_n$ des nombres complexes, $x_0, \ldots, x_n$ des nombres réels, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant :

- $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$;
- il existe $R > 0$ tel que f est bornée en dehors de $[-R, R]$;
- $\mathrm{Re}(f) > 0$.

Sous les deux premières conditions, la mesure $\mu(dy) = \sum_{i=0}^{n} a_i \delta_{x_i}(dy) + f(y)dy$ vérifie la condition (3.12) pour tout $r > 0$. Plus précisément :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^r(y-x)|\mu(dy)| \leq ||u^r||_\infty \Big(\sum_{i=0}^{n} |a_i| + ||f 1_{[-R,R]}||_1 \Big) + ||u^r||_1 ||f 1_{[-R,R]^c}||_\infty$$
$$= u^r(0) \Big(\sum_{i=0}^{n} |a_i| + ||f 1_{[-R,R]}||_1 \Big) + \frac{||f 1_{[-R,R]^c}||_\infty}{r} < +\infty.$$

Sous la troisième condition pour f, μ vérifie la condition (3.13) pour $r > 0$ assez grand. Plus précisément :

$$E_x \left[\int_0^{+\infty} e^{-rs} |\exp(-\widetilde{A}^\mu_s)| ds \right] \leq \int_0^{+\infty} e^{-rs} \exp\Big(\sum_{i=0}^{n} |a_i| L_s^{x_i} \Big) ds$$
$$\leq \int_0^{+\infty} e^{-(r - \sum_{i=0}^{n} |a_i|)s} ds,$$

et donc, pour $r > \sum_{i=0}^{n} |a_i|$, on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} E_x \left[\int_0^{+\infty} e^{-rs} |\exp(-\widetilde{A}^\mu_s)| ds \right] \leq \frac{1}{r - \sum_{i=0}^{n} |a_i|} < +\infty.$$

3.2 Une martingale associée aux temps locaux

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable vérifiant :
- $\mathrm{Re}\,(f) > 0$;
- $\mathrm{Re}\,(f) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$;
- $\mathrm{Im}\,(f)$ est bornée.

On définit :

$$A^f_t = \int_0^t f(X_s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, L^x_t \, dx. \tag{3.15}$$

Notons que pour $\ell, \ell' > 0$, on a :

$$A^f_{\tau_{\ell+\ell'}} = A^f_{\tau_\ell} + A^f_{\tau_{\ell'}} \circ \theta_{\tau_\ell}, \tag{3.16}$$

ce qui entraîne que $(A^f_{\tau_\ell}, \ell \geq 0)$ est un $(P, (\mathcal{F}_{\tau_\ell})_{\ell \geq 0})$ processus de Lévy. En particulier, il existe un unique nombre complexe c_f tel que :

$$E[\exp(-A^f_{\tau_\ell})] = e^{-c_f \ell}. \tag{3.17}$$

On montre aisément que $(\exp(c_f \ell - A^f_{\tau_\ell}), \ell \geq 0)$ est une $(P, (\mathcal{F}_{\tau_\ell})_{\ell \geq 0})$-martingale.

On définit $g_f(x) = E_x[\exp(-A^f_{T_{\{0\}}})]$. On a le résultat suivant :

Proposition 3.4. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le processus $(g_f(X_t)\exp(c_f L_t^0 - A_t^f), t \geq 0)$ est une P_x-martingale.*

Démonstration. On montre d'abord que :

$$g_f(x) = E_x[g_f(X_t)\exp(c_f L_t^0 - A_t^f)]. \tag{3.18}$$

On commence par le cas $x = 0$. De la définition de g_f et de la propriété de Markov forte, on déduit :

$$\begin{aligned} E[g_f(X_t)\exp(c_f L_t^0 - A_t^f)] &= E[E_{X_t}(\exp(-A^f_{T_{\{0\}}}))\exp(c_f L_t^0 - A_t^f)] \\ &= E[\exp(c_f L_t^0 - A_t^f - A^f_{T_{\{0\}}} \circ \theta_t)] \\ &= E[\exp(c_f L_t^0 - A^f_{\tau_{L_t^0}})]. \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que $\tau_{L_t^0} = t + T_{\{0\}} \circ \theta_t$ (voir (3.10)).

Notons que $\{L_t^0 > \ell\} = \{\tau_\ell \leq t\}$, et que L_t^0 est donc un $\mathcal{F}_{\tau_\ell}$-temps d'arrêt. Comme L_t^0 admet des moments exponentiels (voir [6], Chap. V, Prop. 4, p. 130), on peut appliquer le théorème d'arrêt à la martingale $\exp(c_f\,\ell - A^f_{\tau_\ell})$ au temps L_t^0 pour obtenir (3.18) dans le cas $x = 0$. Pour le cas général, il suffit d'appliquer la propriété de Markov au premier temps d'atteinte de 0.

Maintenant, pour $s < t$:

$$\begin{aligned} E[g_f(X_t)\exp(c_f L_t^0 - A_t^f)/\mathcal{F}_s] &= \exp(c_f L_s^0 - A_s^f) E_{X_s}[g_f(X_{t-s})\exp(c_f L_{t-s}^0 - A_{t-s}^f)] \\ &= g_f(X_s)\ \exp(c_f L_s^0 - A_s^f). \end{aligned}$$

La dernière égalité est une application directe de (3.18). □

3.3 Théorie des excursions

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux excursions de X hors de 0, c'est-à-dire aux morceaux de trajectoire du type $\varepsilon_g = (X_{g+t}; 0 \leq t < d - g)$ associés à chaque intervalle d'excursion $]g, d[$ hors de 0.

3.3.1 Notations

On commence d'abord avec quelques notations. On note $\mathcal{D} = \mathcal{D}([0, \infty[)$ l'espace des trajectoires càdlàg à valeurs réelles muni de la topologie de Skohorod, $\mathcal{F}$ sa tribu borélienne et $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$ sa filtration naturelle. On note aussi $\mathcal{D}^{(t)} = \mathcal{D}([0, t])$.

Pour $\omega \in \mathcal{D}$, on définit sa durée de vie comme $V(\omega) = \inf\{s > 0 : \omega(s) = 0\}$. On note $\mathcal{D}^* = \{\omega \in \mathcal{D} : 0 < V(\omega) < \infty\}$.

Maintenant, on définit l'espace des excursions $\mathcal{E}$ comme :

$$\mathcal{E} = \{w \in \mathcal{D}^* :\ w(s) = 0 \ \text{ pour } \ s > V(w)\} \cup \{\delta\}, \tag{3.19}$$

où δ est un point isolé. Pour $a > 0$, on note $\mathcal{E}^{(a)}$ l'espace des excursions de longueur supérieure à a :

$$\mathcal{E}^{(a)} = \{e \in \mathcal{E} : \ V(e) > a\}. \tag{3.20}$$

On appelle excursions les éléments de $\mathcal{E}$ et pour une excursion $e \in \mathcal{E}$, on dit que $V(e)$ est sa durée de vie.
On désigne par $k = (k_t)_{t\geq 0}$, l'opérateur de meurtre défini par :

$$k_t(\omega)(s) = \begin{cases} \omega(s) & \text{si} \quad s < t, \\ 0 & \text{si} \quad s \geq t. \end{cases}$$

On introduit aussi les opérateurs suivants :

$$S_t(\omega)(s) = t^{-1/\alpha} w(ts), \ t > 0, \ \omega \in \mathcal{D},$$
$$N_u(\omega) = S_{V(\omega)/u}(\omega), \ u > 0, \ \omega \in \mathcal{D}^*.$$

Remarque 3.5. Pour $\omega \in \mathcal{D}$ on a :

$$V(S_t(\omega)) = \frac{V(\omega)}{t}, \ t > 0.$$

Pour $\omega \in \mathcal{D}^*$ on a :

$$V(N_u(\omega)) = u, \ u > 0.$$

On a aussi, pour $u > 0$:

$$N_u \circ S_t = N_u \text{ pour tout } t > 0 \text{ et } N_1 \circ k_u = k_1 \circ S_u \ \text{ sur } \ \{u < V < \infty\}, \tag{3.21}$$

et

$$k_u \circ S_{v/u} = N_u \circ k_v \ \text{ sur } \ \{v < V < \infty\} \tag{3.22}$$

3.3.2 Processus des excursions et mesure d'excursion

Définition 3.6 (Processus des excursions)**.** On appelle processus des excursions associé à X le processus $(e_\ell; \ell \geq 0)$ à valeurs dans $\mathcal{E}$, défini par :

$$e_\ell = \begin{cases} (X_{s+\tau_{\ell-}} 1_{\{s<\tau_\ell - \tau_{\ell-}\}}, s \geq 0) & \text{si} \quad \tau_\ell - \tau_{\ell-} > 0, \\ \delta & \text{si} \quad \tau_\ell = \tau_{\ell-}. \end{cases} \tag{3.23}$$

Comme τ_ℓ et $\tau_{\ell-}$ appartient à $\mathcal{N}_0$, on a que pour tout $\ell > 0$ vérifiant $\tau_\ell - \tau_{\ell-} > 0$, l'excursion e_ℓ commence et termine en 0.
Itô a montré dans [29] que le processus des excursions est un processus de Poisson ponctuel (voir aussi [6], chapitre IV, théorème 10). On note n_α sa mesure caractéristique que l'on appelle mesure d'excursion. On a en particulier, une formule-clé additive :

Théorème 3.7 (Formule-clé additive)**.** *Soit $F : [0, +\infty[\times \Omega \times \mathcal{E} \to [0, +\infty[$ une fonction prévisible par rapport aux deux premières variables et mesurable par rapport à la troisième. On a :*

$$E\left[\sum_{g\in G(w)} F(g, w, \varepsilon_g(w))\right] = E\left[\int_0^{+\infty} d\ell \int_{\mathcal{E}} F(\tau_\ell(w), w, e)\, n_\alpha(de)\right] \tag{3.24}$$

$$= E\left[\int_0^{+\infty} d_sL_s(w) \int_{\mathcal{E}} F(s, w, e)\, n_\alpha(de)\right], \tag{3.25}$$

où $G = G_0$ (l'ensemble des extrémités gauches des intervalles d'excursion de X hors de 0) et $L_s = L_s^0$.

On a aussi une formule-clé exponentielle :

Théorème 3.8 (Formule-clé exponentielle)**.** *Soit $f : [0,+\infty[\times\mathcal{E} \to [0,+\infty[$ une fonction mesurable.*

$$E\left[\exp\big(-\sum_{\ell>0} f(\ell, e_\ell)\big)\right] = \exp\Big(-\int_0^{+\infty} d\ell \int_{\mathcal{E}} (1 - e^{-f(\ell,e)})\, n_\alpha(de)\Big). \tag{3.26}$$

Une première application de ces formules est le calcul de la loi, sous n_α, de la durée de vie d'une excursion.

Corollaire 3.9. *On a :*

$$n_\alpha(V \in dv) = \frac{(\alpha-1)\sin(\pi/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)} c^{1/\alpha} v^{\frac{1}{\alpha}-2} 1_{(v>0)} dv. \tag{3.27}$$

Démonstration. Pour $\lambda > 0$ et $\ell > 0$, on met $f(s,e) = \lambda V(e)\, 1_{]0,\ell[}(s)$ dans la formule-clé exponentielle (3.26), pour obtenir :

$$E(e^{-\lambda\tau_\ell}) = \exp\Big(-\ell \int_{\mathcal{E}} (1 - e^{-\lambda V(e)})\, n_\alpha(de)\Big), \tag{3.28}$$

ainsi, si on compare avec (3.8), on obtient le résultat. □

Remarque 3.10. On pourra trouver les démonstrations des théorèmes 3.7 et 3.8 dans [6],[12] et [40].

Remarque 3.11. Le résultat du corollaire 3.9 avait été déjà obtenu par Fitzsimmons et Getoor dans [22] (voir formule (4.21)).

Remarque 3.12. En utilisant la notation du chapitre IV de [6] et la définition de la mesure d'excursion n_α, on obtient dans notre cas particulier du processus symétrique stable d'indice $\alpha \in]1,2]$:

$$\bar{\Pi}(a) = n_\alpha(V > a) = \frac{\alpha\sin(\pi/\alpha) c^{1/\alpha}}{\Gamma(1/\alpha)}\, a^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

3.3.3 Propriété de Markov sous n_α

Un autre résultat important de la théorie générale des excursions (voir [12], [25] ou [29]) dit que sous n_α, le processus des coordonnées est un processus de Markov avec semi-groupe $(P_t^0; t > 0)$ (le semi-groupe du processus tué en 0). Plus précisément :

Théorème 3.13 (Propriété de Markov sous n_α)**.** *Pour tout $t > 0$ et toute fonctionnelle Z_t positive, $\mathcal{F}_t$-mesurable et F fonction mesurable sur $\mathcal{E}$:*

$$n_\alpha(Z_t\, F(X \circ \theta_t)) = \int n_\alpha(Z_t; X_t \in dx)\, E_x^0(F(X)). \tag{3.29}$$

On définit les lois d'entrée $(\mu_s;\ s > 0)$ par $\mu_s(dx) = n_\alpha(X_s \in dx)$.

Proposition 3.14 ([16],[23] et [47])**.** *Les lois d'entrée* $(\mu_s; s > 0)$ *sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Plus précisément :*

$$\mu_s(dx) = \rho_{T_{\{x\}}}(s)dx. \tag{3.30}$$

Démonstration. On montre aisément à l'aide de la formule-clé additive que :

$$U^q f(0) = u^q(0) \int_0^{+\infty} e^{-qu} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \mu_u(dy) \Big) du, \tag{3.31}$$

D'autre part, grâce à (1.20) on obtient :

$$U^q f(0) = u^q(0) \int_0^{+\infty} e^{-qu} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \rho_{T_{\{y\}}}(u) dy \Big) du \tag{3.32}$$

En comparant ces deux expressions pour $U^q f(0)$, on obtient le résultat désiré. □

Remarque 3.15. Ce résultat est demontré par Chen, Fukushima et Ying dans [16] et Fitzsimmons et Getoor dans [23] dans un cadre markovien plus général. La preuve donnée par K.Yano, Y.Yano et Yor dans [47] est similaire à celle qu'on donne ici.

3.3.4 Excursion normalisée et méandre

Dans ce paragraphe on procédera de façon analogue à ce qui a été fait dans [15] pour les excursions associées au processus $S - X$.
On définit pour $a > 0$:

$$g_1(a) = \inf\{s > 0 : X_{s+u} \neq 0 \text{ pour tout } u \in [0, a]\},$$

$$d_1(a) = \inf\{s > g_1(a) : X_s = 0\}, \quad \ell_1(a) = d_1(a) - g_1(a) > a,$$

et $F_a(X) = (X_{g_1(a)+s}; 0 \leq s \leq \ell_1(a))$ la première excursion de X de longueur supérieure à a.

La loi de $F_a(X)$ est donnée par $n_\alpha(\cdot | V > a)$ (voir [6], chapitre IV).

Notons que :

$$F_a(X) = S_{1/a} \circ F_1 \circ S_a(X)$$

et donc, à l'aide de (3.21) et de la propriété de scaling, on obtient que pour toute fonctionnelle H mesurable et bornée :

$$n_\alpha(H \circ N_u | V > a) = n_\alpha(H \circ N_u | V > 1).$$

Cette dernière relation montre que la mesure sur $\mathcal{D}^{(u)}$, définie par :

$$P^{(e,u)}(\cdot) = n_\alpha(\cdot \circ N_u | V > a)$$

ne dépend pas de a et par conséquent de la durée de vie des excursions. Nous noterons $P^{(e)}$ la mesure $P^{(e,1)}$.

Remarque 3.16. Le fait que la définition de $P^{(e,u)}$ ne dépende pas de la durée de vie des excursions montre que $P^{(e,u)}$ est une version de la loi du processus des excursions conditionné par leur longueur au sens suivant :

$$n_\alpha(\cdot) = \int_0^{+\infty} P^{(e,u)}(\cdot)\, n_\alpha(V \in du). \tag{3.33}$$

Définition 3.17 (Excursion normalisée)**.** On appelle loi des excursions normalisées du processus X, la mesure de probabilité $P^{(e)}$ sur $\mathcal{D}^{(1)}$.

Notons :

$$g_t = \sup\{s \leq t : \ X_s = 0\}$$
$$d_t = \inf\{s \geq t : \ X_s = 0\}.$$

Proposition 3.18. *Sous P, conditionnellement à $d_t - g_t = u$, le processus*

$$(X_{g_t+s};\ 0 \leq s \leq d_t - g_t)$$

a pour loi $P^{(e,u)}$. La propriété de scaling entraîne que le processus

$$\left(\frac{1}{(d_t - g_t)^{1/\alpha}} X_{g_t+(d_t-g_t)s}\ ;\ 0 \leq s \leq 1\right)$$

a pour loi $P^{(e)}$. Celui-ci est indépendant de la variable aléatoire $d_t - g_t$ qui a pour loi :

$$P(d_t - g_t \in ds) = \frac{\sin(\pi/\alpha)}{\pi t}\left[1 - 1_{\{s\leq t\}}\left(1 - \frac{s}{t}\right)^{1-1/\alpha}\right]\left(\frac{s}{t}\right)^{1/\alpha-2} ds. \tag{3.34}$$

Démonstration. Notons d'abord qu'à l'aide de la formule-clé additive, on trouve pour toute fonctionnelle H mesurable et bornée :

$$\begin{aligned}
E\big[H((X_{g_t+s};\ 0 \leq s \leq d_t - g_t))\big] &= E\Big[\sum_{g\in G} H(e_g(\omega)) 1_{\{g<t<V(e_g(\omega))+g\}}\Big] \\
&= E\Big[\int_0^t n_\alpha(H, 1_{\{V>t-u\}})\, dL_u\Big] \\
&= E\Big[\int_0^t dL_u \int_{t-u}^{+\infty} n_\alpha(H|V = s)\, n_\alpha(V \in ds)\Big] \\
&= \int_0^{+\infty} n_\alpha(H|V = s)\, E[L_t - 1_{\{s\leq t\}} L_{t-s}]\, n_\alpha(V \in ds).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

En particulier, en prenant H qui dépend seulement de V, on obtient :

$$P(d_t - g_t \in ds) = E[L_t - 1_{\{s\leq t\}} L_{t-s}]\, n_\alpha(V \in ds), \tag{3.36}$$

et si on injecte cela dans (3.35), on obtient :

$$E\big[H((X_{g_t+s};\ 0 \leq s \leq d_t - g_t))\big] = \int_0^{+\infty} n_\alpha(H|V = s)\, P(d_t - g_t \in ds), \tag{3.37}$$

et donc :

$$E\big[H((X_{g_t+s};\ 0 \le s \le d_t - g_t))|d_t - g_t = s\big] = n_\alpha(H|V = s) = P^{(e,s)}(H).$$

Maintenant, si on remarque que :

$$\Big(\frac{1}{(d_t - g_t)^{1/\alpha}} X_{g_t+(d_t-g_t)s}\ ;\ 0 \le s \le 1\Big) = N_1\big((X_{g_t+s};\ 0 \le s \le d_t - g_t)\big),$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
E\big[H \circ N_1((X_{g_t+s};\ 0 \le s \le d_t - g_t))\big] &= \int_0^{+\infty} n_\alpha(H \circ N_1|V = s)\, P(d_t - g_t \in ds) \\
&= \int_0^{+\infty} n_\alpha(H \circ N_1|V = 1)\, P(d_t - g_t \in ds) \\
&= n_\alpha(H \circ N_1|V = 1) \\
&= n_\alpha(H|V = 1) \\
&= P^{(e)}(H).
\end{aligned}$$

Notons finalement qu'à partir de (3.6), (3.27) et (3.36), on obtient (3.34).

□

Proposition 3.19. *Sous P, conditionnellement à $t - g_t = u$ le processus*

$$(X_{g_t+s};\ 0 \le s \le d_t - g_t)$$

a pour loi $n_\alpha(\cdot|V > u)$, et a donc même loi que $F_u(X)$. La loi de $t - g_t$ est donnée par :

$$P(t - g_t \in ds) = \frac{\sin(\pi/\alpha)}{\pi}(t - s)^{-1/\alpha} s^{1/\alpha - 1} 1_{\{0 \le s \le t\}} ds, \tag{3.38}$$

c'est-à-dire que $\frac{t-g_t}{t}$ suit une loi béta de paramètres $1/\alpha$ et $1 - 1/\alpha$.

Démonstration. Notons d'abord qu'à l'aide de la formule-clé additive, on trouve :

$$\begin{aligned}
E\big[H((X_{g_t+s};\ 0 \le s \le d_t - g_t))\, f(t - g_t)\big] &= E\Big[\sum_{g \in G} H(e_g(\omega))\, f(t - g)\, 1_{\{g < t < V(e_g(\omega)) + g\}}\Big] \\
&= E\Big[\int_0^t n_\alpha(H, V > t - u)\, f(t - u)\, dL_u\Big] \\
&= \int_0^t n_\alpha(H, V > t - u)\, f(t - u)\, p_u(0)\, du \\
&= \int_0^t n_\alpha(H, V > v)\, f(v)\, p_{t-v}(0)\, dv. \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

Si on prend $H = 1$ dans (3.39) on obtient que :

$$P(t - g_t \in ds) = p_{t-s}(0)\, n_\alpha(V > s) ds. \tag{3.40}$$

Si on injecte cela dans (3.39) avec $f = 1$, on trouve :

$$E\big[H((X_{g_t+s};\ 0 \le s \le d_t - g_t))|t - g_t = s\big] = n_\alpha(H|V > s).$$

De (1.31), (3.27) et (3.40), on obtient (3.38). □

Définition 3.20 (Méandre)**.** On appelle loi du méandre de longueur 1 la mesure de probabilité $P^{(m)}$ sur $\mathcal{D}^{(1)}$ définie par :

$$P^{(m)}(\cdot) = n_\alpha(\cdot \circ k_1 | V > 1).$$

De même pour $u > 0$, on définit la mesure de probabilité $P^{(m,u)}$ sur $\mathcal{D}^{(u)}$ par :

$$P^{(m,u)}(\cdot) = n_\alpha(\cdot \circ k_u | V > u).$$

Corollaire 3.21. *Sous P, pour $t > u$, conditionnellement à $t - g_t = u$, le processus*

$$(X_{g_t+s};\ 0 \leq s \leq t - g_t)$$

a pour loi $P^{(m,u)}$.

Démonstration. Directe à partir de la proposition (3.19). □

Remarquons maintenant que de la propriété de scaling et (3.22), on obtient :

$$P^{(m,u)}(\cdot) = n_\alpha(\cdot \circ N_u \circ k_v | V > v). \tag{3.41}$$

Proposition 3.22. *Le processus*

$$\left(\frac{1}{(1-g_1)^{1/\alpha}} X_{g_1+(1-g_1)s}\ ;\ 0 \leq s \leq 1\right)$$

est indépendant de $1 - g_1$ et a pour loi $P^{(m)}$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que :

$$\left(\frac{1}{(1-g_1)^{1/\alpha}} X_{g_1+(1-g_1)s}\ ;\ 0 \leq s \leq 1\right) = N_1 \circ k_{1-g_1}\big((X_{g_1+s};\ 0 \leq s \leq d_1 - g_1)\big),$$

et d'appliquer la proposition (3.19) et la formule (3.41). □

3.3.5 h-processus et formule de désintégration pour n_α

L'ensemble des résultats qu'on énoncera dans ce paragraphe est un bref résumé des résultats sur le h-processus démontrés par K. Yano dans [45] et K.Yano, Y. Yano et M. Yor dans [47].
On commence par rappeler la définition de la fonction h :

$$h(x) = \lim_{q \to 0+} \{u^q(0) - u^q(x)\} = \frac{1}{2c\,\Gamma(\alpha)\,\sin\left(\frac{\pi\,(\alpha-1)}{2}\right)}\,|x|^{\alpha-1}.$$

Comme application de la formule de Tanaka (3.1), on peut démontrer que la fonction h est harmonique pour le processus tué en 0, c'est-à-dire que pour tout $x \neq 0$:

$$E_x^0[h(X_t)] = h(x).$$

En plus, à l'aide de l'équation résolvante (1.8) et de la propriété 3.14, on montre que :

$$n_\alpha(h(X_t)) = 1. \tag{3.42}$$

Ainsi, on peut définir le h-processus P_x^h comme la loi sur l'espace canonique définie par :

$$P_x^h|_{\mathcal{F}_t} = \frac{h(X_t)}{h(x)} \cdot P^{x,0}|_{\mathcal{F}_t}, \qquad x \neq 0, \tag{3.43}$$

$$P_0^h|_{\mathcal{F}_t} = h(X_t) \cdot n_\alpha|_{\mathcal{F}_t}, \qquad x = 0. \tag{3.44}$$

On a comme dans le cas brownien, une formule de désintégration pour n_α par rapport à la durée de vie :

Théorème 3.23 (Formule de désintégration de n_α par rapport à la durée de vie [45])**.**

$$n_\alpha(\cdot) = \int_0^{+\infty} P_0^h(\cdot \mid X_t = 0)\rho_\alpha(t)dt, \tag{3.45}$$

où :

$$\rho_\alpha(t) = \frac{n_\alpha(V \in dt)}{dt} = \frac{(\alpha-1)\sin(\pi/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)} c^{1/\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-2}.$$

Remarque 3.24. Il est démontré dans [45] que le semi-groupe de $(P_x^h; x \in \mathbb{R})$ a la propriété de Feller, ce qui entraîne en particulier que les excursions commencent de façon oscillatoire, plus précisément :

$$n_\alpha(\{\exists t_n \searrow 0 \text{ vérifiant } X_{t_n} X_{t_{n+1}} < 0\}^c) = 0$$

Remarque 3.25. * Il est montré dans [47] que la loi P_0^h peut être obtenue comme la limite des méandres, plus précisément :

$$P^{(m,u)} \xrightarrow[u \to 0]{} P_0^h, \qquad \text{le long de } (\mathcal{F}_s).$$

Chapitre 4

Les temps passés positif et négatif

4.1 Définitions et quelques considérations sur la mesure d'Itô des excursions

Dans ce chapitre, on suppose que $X = (X_t; t \geq 0)$ est un processus de Lévy symétrique stable d'indice $\alpha \in]1, 2]$, d'exposant caractéristique $\psi_\alpha(\lambda) = c|\lambda|^\alpha$.

On définit les processus $A^+ = (A_t^+, t \geq 0)$ et $A^- = (A_t^-, t \geq 0)$ par :

$$A_t^+ = \int_0^t 1_{\{X_s > 0\}}\, ds \quad \text{et} \quad A_t^- = \int_0^t 1_{\{X_s < 0\}}\, ds.$$

Fitzsimmons et Getoor ont démontré ([22]) que le couple $(\tau_\ell, A_{\tau_\ell}^+; \ell \geq 0)$, ou de façon équivalente $(A_{\tau_\ell}^+, A_{\tau_\ell}^-; \ell \geq 0)$, est un processus de Lévy (résultat encore valable pour $(A_{\tau_\ell}^{f_1}, ..., A_{\tau_\ell}^{f_n}; \ell \geq 0)$ où $A_t^f = \int_0^t f(X_s)\, ds$). La transformée de Laplace conjointe est donnée par :

$$E\left[\exp\left(-q\tau_\ell - \lambda A_{\tau_\ell}^+\right)\right] = \exp\left(-\ell\phi(q, \lambda)\right), \qquad q > 0, \lambda > 0, \ell > 0, \tag{4.1}$$

où $\phi(q, \lambda) = \lambda \left[\int_q^{q+\lambda} \kappa(v) dv\right]^{-1}$, $\kappa(q) = u^q(0)$ et donc, grâce à (1.30), on obtient que :

$$\phi(q, \lambda) = c^{1/\alpha} \sin(\pi/\alpha)\, \frac{\lambda}{(q + \lambda)^{1/\alpha} - q^{1/\alpha}}.$$

4.1.1 Sur le temps passé positif sous la mesure d'excursion

On définit sur l'espace des excursions :

$$A_V^+(e) = \int_0^{V(e)} 1_{\{e(s) > 0\}}\, ds,$$

où $V(e)$ désigne la durée de vie de l'excursion e. Grâce à la formule-clé exponentielle pour n_α, on obtient :

$$\int n_\alpha(de) \left(1 - e^{-qV(e) - \lambda A_V^+(e)}\right) = c^{1/\alpha} \sin(\pi/\alpha)\, \frac{\lambda}{(q + \lambda)^{1/\alpha} - q^{1/\alpha}}, \qquad q > 0, \lambda > 0, \tag{4.2}$$

d'où on peut obtenir à nouveau la formule (3.27), mais aussi :

$$n_\alpha(A_V^+ \in dv) = \frac{(\alpha-1)\,\sin(\pi/\alpha)}{\alpha\,\Gamma(1/\alpha)}\, c^{1/\alpha}\, v^{\frac{1}{\alpha}-2}\, 1_{\{v>0\}}\, dv, \tag{4.3}$$

et on retrouve la formule (4.21) de [22].

Maintenant, on donnera une expression pour la transforme de Laplace, sous n_α, du temps passé positif par une excursion, conditionnellement à sa durée de vie. Pour cela, on définit pour $0 < \beta < 1$, la suite des nombres réels $(a_n(\beta))_{n\in\mathbb{N}}$, par la relation :

$$\frac{x}{(1+x)^\beta - 1} = \sum_{n\geq 0} a_n(\beta)\, x^n.$$

Proposition 4.1. *Pour tout $\lambda > 0$:*

$$n_\alpha\left(e^{-\lambda A_V^+}/V = v\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n(1/\alpha)}{(1/\alpha - 1)_n}\,(\lambda v)^n.$$

Démonstration. Notons que, en utilisant la formule (3.27), on peut réécrire (4.2) de la façon suivante :

$$\frac{\alpha-1}{\Gamma(1/\alpha)}\int_0^{+\infty} v^{\frac{1}{\alpha}-2}\left(1 - e^{-qv} n_\alpha\left(e^{-\lambda A_V^+}/V = v\right)\right) dv = q^{1-1/\alpha}\frac{(\frac{\lambda}{q})}{(1+\frac{\lambda}{q})^{1/\alpha}-1}. \tag{4.4}$$

Ainsi, de la définition de la suite $(a_n(1/\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$, on peut écrire :

$$\frac{\alpha-1}{\Gamma(1/\alpha)}\int_0^{+\infty} v^{\frac{1}{\alpha}-2}\left(1 - e^{-qv} n_\alpha\left(e^{-\lambda A_V^+}/V = v\right)\right) dv = \sum_{n\geq 0} a_n(1/\alpha)\frac{\lambda^n}{q^{n-1+1/\alpha}},$$

et si on dérive cette équation par rapport à q, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-1}{\Gamma(1/\alpha)}\int_0^{+\infty} v^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-qv} n_\alpha\left(e^{-\lambda A_V^+}/V = v\right) dv &= \sum_{n\geq 0}\frac{a_n(1/\alpha)\,(1-n-1/\alpha)}{q^{n+1/\alpha}}\,\lambda^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{a_n(1/\alpha)\,(1-n-1/\alpha)}{\Gamma(n+1/\alpha)}\,\lambda^n \int_0^{+\infty} e^{-qv} v^{n+1/\alpha-1} dv,\end{aligned}$$

et alors :

$$\begin{aligned} n_\alpha\left(e^{-\lambda A_V^+}/V = v\right) &= \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha-1}\sum_{n\geq 0}\frac{a_n(1/\alpha)\,(1-n-1/\alpha)}{\Gamma(n+1/\alpha)}\,(\lambda v)^n \\ &= \frac{1}{\alpha-1}\sum_{n\geq 0}\frac{a_n(1/\alpha)\,(1-n-1/\alpha)}{(1/\alpha)_n}\,(\lambda v)^n,\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Remarque 4.2. Pour $\alpha = 2$, $a_0(1/2) = 2$ et pour tout $n \geq 1$,

$$a_n(1/2) = \frac{(-1)^n\,(-1/2)_n}{n!},$$

et on retrouve :

$$n_2\left(e^{-\lambda A_V^+}/V = v\right) = \frac{1 + e^{-\lambda v}}{2}.$$

Remarque 4.3. Comme $x = ((1+x)^\beta - 1) \sum_{k\geq 0} a_k(\beta)\, x^k$ et $a_0(\beta) = 1/\beta$, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(\beta)\,(-\beta)_{n-k+1} \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+1)!} = 0,$$

où $(\gamma)_n \equiv (\gamma)(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)$ et $(\gamma)_0 \equiv 1$.

Remarque 4.4. Notons que :

$$n_\alpha\left(e^{-\lambda \frac{A_V^+}{V}} / V = v\right) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n\geq 0} \frac{a_n(1/\alpha)}{(1/\alpha - 1)_n}\, \lambda^n,$$

d'où $\frac{A_V^+}{V}$ et V sont indépendants sous n_α, ce que l'on sait déjà depuis [22].

4.1.2 Temps passé positif au dernier passage en 0 avant t

Soit $t > 0$, on définit :

$$g_t = \sup\{s \leq t; X_s = 0\}.$$

Maintenant, pour $p > 0$, considérons $\mathbf{e}_p$ un temps exponentiel indépendant de paramètre p.
Le résultat suivant est une conséquence de la formule-clé additive pour le processus des excursions et de la formule (4.1).

Proposition 4.5. *Pour tout $\lambda, \mu > 0$, on a :*

$$E\left[\exp\left(-\lambda A^+_{g_{\mathbf{e}_p}} - \mu g_{\mathbf{e}_p}\right)\right] = \frac{\alpha p}{\lambda}\left[\left(1 + \frac{\mu+\lambda}{p}\right)^{1/\alpha} - \left(1 + \frac{\mu}{p}\right)^{1/\alpha}\right].$$

Démonstration. Notons d'abord que pour $\lambda, \mu > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} E\left[\exp\left(-\lambda A^+_{g_{\mathbf{e}_p}} - \mu g_{\mathbf{e}_p}\right)\right] &= E\left[\int_0^{+\infty} e^{-pt}\, e^{-\lambda A^+_{g_t} - \mu g_t}\, dt\right] \\
&= E\left[\sum_{s>0} \int_{\tau_{s-}}^{\tau_s} e^{-pt}\, e^{-\lambda A^+_{\tau_{s-}} - \mu \tau_{s-}}\, dt\right] \\
&= E\left[\sum_{s>0} \frac{\left(e^{-p\tau_{s-}} - e^{-p\tau_s}\right)}{p}\, e^{-\lambda A^+_{\tau_{s-}} - \mu\tau_{s-}}\right],
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
E\left[\exp\left(-\lambda A^+_{g_{\mathbf{e}_p}} - \mu g_{\mathbf{e}_p}\right)\right] &= E\left[\sum_{s>0} e^{-\lambda A^+_{\tau_{s-}}}\, e^{-(\mu+p)\tau_{s-}} \left(1 - e^{-pV(e_s)}\right)\right] \\
&= E\left[\int_0^{+\infty} ds \int n_\alpha(de)\, e^{-\lambda A^+_{\tau_s}}\, e^{-(\mu+p)\tau_s}\left(1 - e^{-pV(e)}\right)\right] \\
&= \int_0^{+\infty} E\left[e^{-\lambda A^+_{\tau_s} - (\mu+p)\tau_s}\right] ds \int n_\alpha(de)\,(1 - e^{-pV(e)}).
\end{aligned}$$

Et alors, grâce à (3.8), (3.28) et (4.1) on a :

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(-\lambda A^+_{g_{\mathbf{e}_p}} - \mu g_{\mathbf{e}_p}\right)\right] &= \frac{1}{\kappa(p)} \int_0^{+\infty} e^{-s\,\phi(\mu+p,\lambda)}\,ds \\ &= \frac{1}{\phi(\mu+p,\lambda)\,\kappa(p)} \\ &= \frac{\alpha p}{\lambda}\left(1+\frac{\mu}{p}\right)^{1/\alpha}\left[\left(1+\frac{\lambda}{\mu+p}\right)^{1/\alpha} - 1\right]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Le résultat en découle. □

Maintenant, on passe au temps déterministe.

Proposition 4.6. *Pour tout $\lambda, \mu > 0$, on a :*

1. $E\left[\exp\left(-\lambda A^+_{g_t} - \mu g_t\right)\right] = \frac{(\lambda+\mu)\,{}_1F_1(1-1/\alpha,2;-(\lambda+\mu)t) - \mu\,{}_1F_1(1-1/\alpha,2;-\mu t)}{\lambda}$. *En particulier, $A^+_{g_1}$ suit la loi béta de paramètres $1-1/\alpha$ et $1+1/\alpha$.*
2. $E\left[\exp\left(-\lambda \frac{A^+_{g_1}}{g_1} - \mu g_1\right)\right] = \frac{\sin(\pi/\alpha)}{\pi} \int_0^1\int_0^1 e^{-\lambda y}\, e^{-\mu s}\, s^{-1/\alpha}\,(1-s)^{1/\alpha-1}\,dy\,ds$. *En particulier, les variables $\frac{A^+_{g_1}}{g_1}$ et g_1 sont indépendantes, $\frac{A^+_{g_1}}{g_1}$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$ et g_1 la loi béta de paramètres $1-1/\alpha$ et $1/\alpha$.*

Démonstration. Pour la première assertion, il suffit de noter que pour tout $\gamma > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\gamma}\left[\left(1+\frac{\gamma}{p}\right)^{1/\alpha} - 1\right] &= \frac{\alpha}{\gamma}\sum_{k\geq 1} \frac{(-1/\alpha)_k}{k!}\left(-\frac{\gamma}{p}\right)^k \\ &= -\alpha \sum_{n\geq 0} \frac{(-1/\alpha)_{n+1}\,(-\gamma)^n}{(n+1)!}\,\frac{1}{p^{n+1}} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(1-1/\alpha)_n\,(-\gamma)^n}{(n+1)!} \int_0^{+\infty} e^{-ps}\,\frac{s^n}{n!}\,ds \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(1-1/\alpha)_n}{(2)_n\,n!} \int_0^{+\infty} e^{-ps}(-\gamma s)^n\,ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-ps}\,{}_1F_1(1-1/\alpha, 2; -\gamma s)\,ds, \end{aligned}$$

et utiliser la proposition précédente. Pour montrer que $A^+_{g_1} \overset{(loi)}{=} \beta_{1-1/\alpha,1+1/\alpha}$, il suffit de prendre $t=1$ et $\mu=0$ dans la formule qu'on vient de démontrer (voir [34], 9.11.1).
Pour la deuxième assertion, si on utilise la formule de la partie précédente avec $t=1$, on

trouve (voir [34], formule 9.11.1) :

$$\begin{aligned}
E\left[\exp\left(-\lambda A^+_{g_1} - \mu g_1\right)\right] &= \int_0^1 \frac{(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)s} - \mu e^{-\mu s}}{\lambda} \frac{s^{-1/\alpha}(1-s)^{1/\alpha}}{B(1-1/\alpha, 1+1/\alpha)} ds \\
\text{(intégration par parties)} &= -\int_0^1 \frac{e^{-(\lambda+\mu)s} - e^{-\mu s}}{\lambda} \frac{s^{-1/\alpha-1}(1-s)^{1/\alpha-1}}{\alpha B(1-1/\alpha, 1+1/\alpha)} ds \\
\text{(théorème de Fubini)} &= \int_0^1 \int_0^s e^{-\lambda x} e^{-\mu s} \frac{s^{-1/\alpha-1}(1-s)^{1/\alpha-1}}{\alpha B(1-1/\alpha, 1+1/\alpha)} dx ds \\
\text{(voir [34], (1.2.1) et (1.2.2))} &= \frac{\sin(\pi/\alpha)}{\pi} \int_0^1 \int_0^s e^{-\lambda x} e^{-\mu s} s^{-1/\alpha-1}(1-s)^{1/\alpha-1}\, dx ds,
\end{aligned}$$

Le résultat suit d'un changement de variables. □

Remarque 4.7. On connaissait déjà le résultats de la partie 2 de cette proposition, car :

$$\frac{A^+_{g_1}}{g_1} = \int_0^1 1_{\{Y_s>0\}}\, ds,$$

où $(Y_s \equiv g_1^{-1/\alpha} X_{sg_1}; 0 \leq s \leq 1)$ est un pont indépendant de g_1 (voir [14]) et on sait depuis [22] que la loi du temps passé positif pour le pont est la loi uniforme. Pour la loi de g_1 voir par exemple [6].

4.2 Les variables G_γ, $G_{\gamma,\delta}$, Z_γ et M_γ

Pour $\gamma \in]0,1[$, on note G_γ une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$ avec densité f_{G_γ} donnée par :

$$f_{G_\gamma}(u) = \frac{\gamma\sin(\pi\gamma)}{(1-\gamma)\pi} \frac{u^{\gamma-1}(1-u)^{\gamma-1}}{(1-u)^{2\gamma} - 2\,(1-u)^\gamma\, u^\gamma\, \cos(\pi\gamma) + u^{2\gamma}} 1_{]0,1[}(u). \tag{4.6}$$

Les variables G_γ sont caractérisées par leur transformée de Stieltjes :

$$\begin{aligned}
S(f_{G_\gamma})(\lambda) \equiv \int_0^{+\infty} \frac{f_{G_\gamma}(u)}{\lambda+u} du &= E\left[\frac{1}{\lambda+G_\gamma}\right] \\
&= \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\lambda^{\gamma-1} - (1+\lambda)^{\gamma-1}}{(1+\lambda)^\gamma - \lambda^\gamma}, \qquad \lambda > 0,
\end{aligned}$$

ou, de façon équivalente par :

$$E\left[e^{-\lambda \mathbf{e} G_\gamma}\right] = E\left[\frac{1}{1+\lambda G_\gamma}\right] = \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{1-(1+\lambda)^{\gamma-1}}{(1+\lambda)^\gamma - 1}, \tag{4.7}$$

où, $\mathbf{e}$ est une variable exponentielle standard indépendante de G_γ.

Maintenant, pour $\gamma, \delta \in]0,1[$, on notera $G_{\gamma,\delta}$ une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$ avec pour transformée de Stieltjes :

$$E\left[\frac{1}{\lambda + G_{\gamma,\delta}}\right] = \frac{\gamma}{1-\delta} \frac{\lambda^{\gamma-\delta}\left(\lambda^{\delta-1} - (1+\lambda)^{\delta-1}\right)}{(1+\lambda)^\gamma - \lambda^\gamma}, \qquad \lambda > 0,$$

d'où, on obtient :

$$E\left[\frac{1}{1 + \lambda G_{\gamma,\delta}}\right] = \frac{\gamma}{1-\delta} \frac{1 - (1+\lambda)^{\delta-1}}{(1+\lambda)^\gamma - 1}, \qquad \lambda > 0. \tag{4.8}$$

Pour $\gamma \in]0,1[$, on note Z_γ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ avec densité f_{Z_γ} donnée par :

$$f_{Z_\gamma}(u) = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi\gamma} \frac{1}{u^2 + 2u\cos(\pi\gamma) + 1} 1_{[0,+\infty[}(u). \tag{4.9}$$

On montre aisément, à l'aide de (4.6) et (4.9), les identités en loi suivantes :

$$\frac{1}{Z_{1-\gamma}} \overset{(loi)}{=} Z_{1-\gamma} \overset{(loi)}{=} \left(\frac{1}{G_\gamma} - 1\right)^\gamma. \tag{4.10}$$

D'autre part, on note M_γ une variable aléatoire de Mittag-Leffler, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de loi caractérisée par :

$$E\left[\exp\left(\lambda M_\gamma\right)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n\gamma+1)}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.11}$$

Remarque 4.8. On a aussi que :

$$Z_\gamma \overset{(loi)}{=} \left(\frac{\mathcal{T}_\gamma}{\mathcal{T}'_\gamma}\right)^\gamma \quad \text{et} \quad M_\gamma \overset{(loi)}{=} \frac{1}{(\mathcal{T}_\gamma)^\gamma},$$

où T_γ et T'_γ sont deux variables stables unilatérales standard d'indice γ indépendantes.

Remarque 4.9. Pour une étude approfondie de ces variables et quelques liens avec les excursions de Bessel voir [31] et [8].

4.3 Un possible lien entre les variables $\frac{A_V^+}{V}$ et $G_{\gamma,\frac{1}{2}}$

Considérons n_α la mesure d'excursion associée à notre processus symétrique stable d'indice $\alpha \in]1,2]$ et rappelons le résultat suivant (voir 4.4) :

$$n_\alpha\left(e^{-\lambda \frac{A_V^+}{V}}\right) = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(\gamma)}{(\gamma-1)_n} \lambda^n,$$

où $\gamma = 1/\alpha$. On a donc, que pour tout entier naturel n,

$$n_\alpha\left[\left(\frac{A_V^+}{V}\right)^n\right] = \frac{(-1)^n\, n!\, a_n(\gamma)}{(\gamma-1)_n}.$$

On rappelle que V désigne la durée de vie d'une excursion générique et que les coefficients $\{a_n(\gamma)\}_{n\geq 0}$ sont tels que :

$$\frac{\lambda}{(1+\lambda)^\gamma - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\gamma)\lambda^n.$$

Le lemme suivant permet d'exprimer les coefficients $a_n(\gamma)$ à l'aide des variables $G_{\gamma,\frac{1}{2}}$.

Lemme 4.10. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\begin{aligned} a_n(\gamma) &= \frac{(-1)^n}{2\gamma}\left(E\left[G^n_{\gamma,\frac{1}{2}}\right] - E\left[G^{n-1}_{\gamma,\frac{1}{2}}\right] + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-\frac{1}{2})_{n-k}}{(n-k)!}\,E\left[G^k_{\gamma,\frac{1}{2}}\right]\right), \\ a_0(\gamma) &= 1/\gamma. \end{aligned}$$

Démonstration. Notons qu'à l'aide de (4.8) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{(1+\lambda)^\gamma - 1} &= 2\,\gamma\left(\frac{1-(1+\lambda)^{-1/2}}{(1+\lambda)^\gamma - 1}\right)\left(\frac{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda}}{2\gamma}\right) \\ &= \frac{1}{2\gamma}E\left[\frac{1}{1+\lambda G_{\gamma,\frac{1}{2}}}\right](1+\lambda+\sqrt{1+\lambda}) \\ &= \frac{1}{2\gamma}E\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\lambda G_{\gamma,\frac{1}{2}}\right)^k\right]\left(1+\lambda+\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})_q}{q!}(-\lambda)^q\right) \\ &= \frac{1}{2\gamma}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-\lambda)^k E\left[G^k_{\gamma,\frac{1}{2}}\right] - \sum_{k=1}^{\infty}(-\lambda)^k E\left[G^{k-1}_{\gamma,\frac{1}{2}}\right]\right. \\ &\qquad \left. + \sum_{k,q=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})_q}{q!}E\left[G^k_{\gamma,\frac{1}{2}}\right](-\lambda)^{k+q}\right), \end{aligned}$$

et alors :

$$\begin{aligned} 2\,\gamma\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\gamma)\,\lambda^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n E\left[G^n_{\gamma,\frac{1}{2}}\right] - \sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda)^n E\left[G^{n-1}_{\gamma,\frac{1}{2}}\right] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-\frac{1}{2})_{n-k}}{(n-k)!}E\left[G^k_{\gamma,\frac{1}{2}}\right], \end{aligned}$$

d'où, on obtient le résultat. □

4.4 Loi conjointe du temps passé positif et négatif pour un processus symétrique stable d'indice $\alpha \in]1,2]$

Dans la suite, et pour simplifier les calculs, on suppose que la constante c dans l'exposant caractéristique de X, vérifie $\alpha c^{1/\alpha}\sin(\pi/\alpha) = 1$, de sorte que :

$$E(e^{-\lambda\tau_\ell}) = e^{-\ell\lambda^{1-1/\alpha}},$$

où $(\tau_\ell, \ell \geq 0)$ désigne l'inverse du temps local en 0 de X.
Notons que, à partir de (4.1), on obtient :

$$E\left[\exp\left(-aA^+_{\tau_\ell} - bA^-_{\tau_\ell}\right)\right] = \exp\left(-\ell\,\gamma\,\frac{a-b}{a^\gamma - b^\gamma}\right), \qquad a>0, b>0, \ell>0, \tag{4.12}$$

où $\gamma = 1/\alpha$.

Remarque 4.11. Il est facile de voir, à partir de (4.12), que $A^+_{\tau_\ell}$ et $A^-_{\tau_\ell}$ sont indépendants si et seulement si $\alpha = 2$, c'est-à-dire, dans le cas brownien.

Remarque 4.12. Encore grâce à (4.12), on a :

$$E\left[\exp\left(-b(xA^+_{\tau_\ell} + A^-_{\tau_\ell})\right)\right] = \exp\left(-\ell\gamma\left(\frac{x-1}{x^\gamma - 1}\right)b^{1-\gamma}\right), \qquad b > 0, x > 0, \ell > 0. \quad (4.13)$$

C'est-à-dire, pour tout $x \geq 0$, le processus $(xA^+_{\tau_\ell} + A^-_{\tau_\ell}, \ell \geq 0)$ est un subordinateur stable d'indice $1-\gamma$. Plus précisément :

$$xA^+_{\tau_1} + A^-_{\tau_1} \overset{(loi)}{=} \left[\frac{\gamma(x-1)}{x^\gamma - 1}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \mathcal{T}_{1-\gamma},$$

où, $\mathcal{T}_{1-\gamma}$ est une variable stable standard d'indice $1-\gamma$.

4.4.1 Mesure de Lévy associée à une pseudo-transformée de Laplace

Pour $\lambda > 0$, on cherche une mesure μ^λ_γ sur $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\frac{E\left[\exp\left(-\lambda(xA^+_{\tau_1} + A^-_{\tau_1})\right)\right]}{E\left[\exp\left(-\lambda A^-_{\tau_1}\right)\right]} = \exp\left(-\int_{\mathbb{R}_+}(1 - e^{-xy})\,\mu^\lambda_\gamma(dy)\right), \qquad x > 0, \lambda > 0. \quad (4.14)$$

Grâce à (4.13), cette égalité est équivalente à :

$$\int_{\mathbb{R}_+}(1 - e^{-xy})\,\mu^\lambda_\gamma(dy) = \gamma\,\lambda^{1-\gamma}\left(\frac{x - x^\gamma}{x^\gamma - 1}\right), \qquad x > 0, \lambda > 0, \quad (4.15)$$

ou encore à :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\bar{\mu}^\lambda_\gamma(t)\,dt = \gamma\,\lambda^{1-\gamma}\left(\frac{1 - x^{\gamma-1}}{x^\gamma - 1}\right), \qquad x > 0, \lambda > 0, \quad (4.16)$$

où $\bar{\mu}^\lambda_\gamma(t) = \mu^\lambda_\gamma([t, +\infty[)$.

Proposition 4.13. *Pour $\lambda > 0$, la mesure μ^λ_γ définie par :*

$$\mu^\lambda_\gamma(dt) = f_{\mu^\lambda_\gamma}(t)\,dt = (1-\gamma)\,\lambda^{1-\gamma}\,E\left[\frac{1}{G_\gamma}\left(\frac{1}{G_\gamma} - 1\right)e^{-t\left(\frac{1}{G_\gamma} - 1\right)}\right] dt,$$

est la mesure de Lévy d'un certain subordinateur et elle vérifie l'équation (4.14).

Démonstration. Notons d'abord que, comme la variable G_γ est à valeurs dans $]0,1[$, la fonction $f_{\mu^\lambda_\gamma}$ est bien positive. Maintenant, on va vérifier que la mesure μ^λ_γ est bien la mesure de Lévy d'un certain subordinateur, c'est-à-dire qu'on va montrer que :

$$\int_0^{+\infty}(1 \wedge t)\,\mu^\lambda_\gamma(dt) < +\infty.$$

Notons que grâce à (4.10) on a :

$$f_{\mu^\lambda_\gamma}(t) = (1-\gamma)\,\lambda^{1-\gamma}\,E\left[\left(Z^{1/\gamma}_{1-\gamma} + 1\right)Z^{1/\gamma}_{1-\gamma}\,e^{-tZ^{1/\gamma}_{1-\gamma}}\right], \quad (4.17)$$

et alors :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\mu_\gamma^\lambda(dt) &= (1-\gamma)\,\lambda^{1-\gamma}\,E\left[\left(Z_{1-\gamma}^{1/\gamma}+1\right)\left(\int_0^1 tZ_{1-\gamma}^{1/\gamma}\,e^{-tZ_{1-\gamma}^{1/\gamma}}\,dt\right)\right]\\ &= (1-\gamma)\,\lambda^{1-\gamma}\,E\left[\left(Z_{1-\gamma}^{1/\gamma}+1\right)\left(-e^{-Z_{1-\gamma}^{1/\gamma}}+\frac{1-e^{-Z_{1-\gamma}^{1/\gamma}}}{Z_{1-\gamma}^{1/\gamma}}\right)\right]\\ &\leq 2\,(1-\gamma)\,\lambda^{1-\gamma} < +\infty,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \mu_\gamma^\lambda(dt) &= (1-\gamma)\,\lambda^{1-\gamma}\,E\left[\left(Z_{1-\gamma}^{1/\gamma}+1\right)\left(\int_1^{+\infty} Z_{1-\gamma}^{1/\gamma}e^{-tZ_{1-\gamma}^{1/\gamma}}\,dt\right)\right]\\ &= (1-\gamma)\,\lambda^{1-\gamma}\,E\left[\left(Z_{1-\gamma}^{1/\gamma}+1\right)\,e^{-Z_{1-\gamma}^{1/\gamma}}\right]\\ &\leq 2\,(1-\gamma)\,\lambda^{1-\gamma} < +\infty.\end{aligned}$$

Maintenant, montrons que la mesure μ_γ^λ vérifie l'équation (4.14). Notons que de la définition de μ_γ^λ, on a :

$$\frac{\lambda^{\gamma-1}}{1-\gamma}\,\bar{\mu}_\gamma^\lambda(t) = E\left[\frac{1}{G_\gamma}\,e^{-t\left(\frac{1}{G_\gamma}-1\right)}\right], \tag{4.18}$$

Or, comme pour toute fonction positive f sur $\mathbb{R}_+$ on a :

$$E[f(\mathbf{e}G_\gamma)] = E\left[\int_0^{+\infty} e^{-u}\,f(uG_\gamma)\,du\right] = E\left[\int_0^{+\infty}\frac{dt}{G_\gamma}\,e^{-t/G_\gamma}\,f(t)\right],$$

on peut réécrire (4.18) comme :

$$\frac{\lambda^{\gamma-1}}{1-\gamma}\,e^{-t}\,\bar{\mu}_\gamma^\lambda(t)\,dt = P(\mathbf{e}G_\gamma\in dt). \tag{4.19}$$

Alors, grâce à (4.7), μ_γ^λ vérifie l'équation (4.16) qui est équivalente à (4.14). □

Remarque 4.14. Maintenant, notons que pour $x>1$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{x-x^\gamma}{x^\gamma-1} &= \frac{x}{x^\gamma(1-\frac{1}{x^\gamma})}-\frac{1}{1-\frac{1}{x^\gamma}}\\ &= (x^{1-\gamma}-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x^{n\gamma}}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{x^{k\gamma-1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x^{n\gamma}}.\end{aligned}$$

Alors, si on injecte cela dans (4.15) et que l'on dérive en x, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-xy} y f_{\mu_\gamma^\lambda}(y)dy &= \gamma\lambda^{1-\gamma}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-\gamma k)}{x^{k\gamma}} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\gamma}{x^{n\gamma+1}}\right\} \\
&= \gamma\lambda^{1-\gamma}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-\gamma k)}{\Gamma(\gamma k)}\int_0^{+\infty} t^{\gamma k-1}e^{-xt}dt - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\gamma}{\Gamma(\gamma n+1)}\int_0^{+\infty} t^{\gamma n}e^{-xt}dt\right\} \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, t\, g_\gamma^\lambda(t)\, dt \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

où :

$$g_\gamma^\lambda(t) = \frac{\gamma\lambda^{1-\gamma}}{t}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{\gamma k}}{\Gamma(\gamma k)}\left(\frac{1-\gamma k}{t}+1\right).$$

Peut-on en déduire que $f_{\mu_\gamma^\lambda} = g_\gamma^\lambda$? Pour répondre à cette question, étudions la quantité $\int_0^\infty (1\wedge t) g_\gamma^\lambda(t)dt$. Notons que pour $T > 1$:

$$\begin{aligned}
\int_1^T g_\gamma^\lambda(t)dt &= \gamma\lambda^{1-\gamma}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(\gamma k)}\int_1^T \left((1-\gamma k)t^{\gamma k-2} + t^{\gamma k-1}\right) dt \\
&= \gamma\lambda^{1-\gamma}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(\gamma k)}\left\{1 - T^{\gamma k-1} + \frac{T^{\gamma k-}-1}{\gamma k}\right\} \\
&= \gamma\lambda^{1-\gamma}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(\gamma k)}\left(1-\frac{1}{\gamma k}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(\gamma k)}\left(\frac{T^{\gamma k}}{\gamma k} - T^{\gamma k-1}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Si on fait alors tendre T vers l'infini, on obtient par convergence monotone :

$$\int_1^{+\infty} g_\gamma^\lambda(t)dt = +\infty.$$

En particulier, $f_{\mu_\gamma^\lambda}$ et g_γ^λ ne peuvent pas être égales.

Remarque 4.15. On peut montrer à partir de (4.11) que :

$$g_\gamma^\lambda(t) = \frac{\gamma^2\lambda^{1-\gamma}}{t^{2-\gamma}} E\left[M_\gamma\left(t+1-\gamma(1+t^{2\gamma}M_\gamma)\right) e^{t^\gamma M_\gamma}\right]. \qquad (4.21)$$

4.4.2 Calcul de la mesure de Lévy conjointe

Dans cette section, on s'intéresse au calcul de la mesure de Lévy conjointe du processus bi-dimensionnel $(A^+_{\tau_\ell}, A^-_{\tau_\ell}; \ell \geq 0)$, c'est-à-dire que l'on cherche une mesure ν_γ sur $\mathbb{R}^2_+$, telle que pour tous $a, b, \ell > 0$:

$$E[\exp\left(-aA^+_{\tau_\ell} - bA^-_{\tau_\ell}\right)] = \exp\left(-\ell\iint_{\mathbb{R}^2_+}(1-e^{-ax-by})\,\nu_\gamma(dx,dy)\right), \qquad (4.22)$$

ou de façon équivalente, telle que :

$$\frac{E\left[\exp\left(-aA^+_{\tau_\ell} - bA^-_{\tau_\ell}\right)\right]}{E\left[\exp\left(-bA^-_{\tau_\ell}\right)\right]} = \exp\left(-\ell \iint\limits_{\mathbb{R}^2_+} e^{-by}(1-e^{-ax})\nu_\gamma(dx,dy)\right). \tag{4.23}$$

Pour cela, on introduit d'abord la notation suivante (voir (4.6)) :

$$F_\gamma(y,z) \equiv \frac{f_{G_\gamma}(\frac{y}{y+z})}{y+z} = \frac{y+z}{yz} h_\gamma((y/z)^\gamma), \tag{4.24}$$

où :

$$h_\gamma(t) = k_\gamma \frac{t}{1-2\cos(\pi\gamma)t+t^2} \quad \text{et} \qquad k_\gamma = \frac{\gamma\sin(\pi\gamma)}{\pi(1-\gamma)}. \tag{4.25}$$

Lemme 4.16. *Pour tout $a, b > 0$:*

$$\frac{E\left[\exp\left(-aA^+_{\tau_1} - bA^-_{\tau_1}\right)\right]}{E\left[\exp\left(-bA^-_{\tau_1}\right)\right]} = \exp\left(-\frac{b(1-\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-bu}(1-e^{-ay})H_\gamma(u,y)dudy\right), \tag{4.26}$$

où :

$$H_\gamma(u,y) \equiv -\int_0^u (u-z)^{\gamma-1}\frac{\partial F_\gamma}{\partial y}(y,z)dz, \tag{4.27}$$

Démonstration. Notons que, grâce à (4.7) et (4.12), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{E\left[\exp\left(-aA^+_{\tau_1} - bA^-_{\tau_1}\right)\right]}{E\left[\exp\left(-bA^-_{\tau_1}\right)\right]} &= \exp\left(-\gamma\frac{a}{b^\gamma}\left(\frac{1-(\frac{a}{b})^{\gamma-1}}{(\frac{a}{b})^\gamma - 1}\right)\right) \\
\text{(d'après (4.7))} &= \exp\left(-\frac{a(1-\gamma)}{b^\gamma}\int_0^1 \frac{f_{G_\gamma}(u)}{1+u(\frac{a}{b}-1)}du\right) \\
&= \exp\left(-\frac{a(1-\gamma)}{b^\gamma}\int_0^{+\infty}\int_0^1 f_{G_\gamma}(u)e^{-t}e^{-ut(\frac{a}{b}-1)}dudt\right).
\end{aligned}$$

Alors, si on fait le changement de variables $u = y/(y+z)$, $t = b(y+z)$, on arrive à :

$$\begin{aligned}
\frac{E[\exp(-aA^+_{\tau_1} - bA^-_{\tau_1})]}{E[\exp(-bA^-_{\tau_1})]} &= \exp\left(-\frac{ab(1-\gamma)}{b^\gamma}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} F_\gamma(y,z)e^{-bz}e^{-ay}dydz\right) \\
&= \exp\left(-\frac{b(1-\gamma)}{b^\gamma}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-bz}(1-e^{-ay})\left(-\frac{\partial F_\gamma}{\partial y}(y,z)\right)dydz\right).
\end{aligned}$$

La dernière égalité découle d'une intégration par parties, car pour $z > 0$ fixé, on a :

$$\begin{aligned}
(1-e^{-ay})F_\gamma(y,z) &= \frac{(1-e^{-ay})(y+z)}{yz} h_\gamma\left(\left(\frac{y}{z}\right)^\gamma\right) \\
&= \frac{z^{\gamma-1}(y+z)}{(z^{2\gamma} - 2\cos(\pi\gamma)y^\gamma z^\gamma + y^{2\gamma})}\frac{(1-e^{-ay})}{y^{1-\gamma}} \xrightarrow[y\to 0]{} 0,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(1-e^{-ay})F_\gamma(y,z) &= \frac{(1-e^{-ay})(y+z)}{yz} h_\gamma\left(\left(\frac{z}{y}\right)^\gamma\right) \\ &= \frac{(1-e^{-ay})}{z^{1-\gamma}(1-2\cos(\pi\gamma)\frac{z^\gamma}{y^\gamma}+\frac{z^{2\gamma}}{y^{2\gamma}})} \frac{(y+z)}{y^{1+\gamma}} \xrightarrow[y\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Maintenant, grâce à l'identité $b^{-\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int\limits_0^{+\infty} e^{-bx} x^{\gamma-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{E[\exp(-aA^+_{\tau_1} - bA^-_{\tau_1})]}{E[\exp(-bA^-_{\tau_1})]} &= \exp\left(\frac{b(1-\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-bx}x^{\gamma-1}e^{-bz}(1-e^{-ay})\frac{\partial F_\gamma}{\partial y}(y,z)dxdydz\right) \\ &= \exp\left(\frac{b(1-\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-bu}(1-e^{-ay})\left(\int\limits_0^u (u-z)^{\gamma-1}\frac{\partial F_\gamma}{\partial y}(y,z)\right)dzdudy\right).\end{aligned}$$

Le résultat suit de la définition de la fonction H_γ. □

Le cas $\alpha = 2$

Notons d'abord que par définition (voir (4.25)) $h_{1/2}(t) = \frac{t}{\pi(1+t^2)}$ et alors, aussi par définition (voir (4.24)) on trouve que :

$$F_{1/2}(y,z) = \frac{1}{\pi\sqrt{yz}},$$

d'où :

$$\frac{\partial F_{1/2}}{\partial y}(y,z) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{y^3 z}},$$

et alors :

$$H_{1/2}(u,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{y^3}} \int\limits_0^u \frac{1}{\sqrt{(u-z)z}} dz.$$

Si on fait le changement de variables $v = z/u$, on obtient alors :

$$H_{1/2}(u,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{y^3}} \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-v)v}} dv = \frac{1}{2\sqrt{y^3}}.$$

En particulier, $H_{1/2}(u,y)$ ne dépend pas de u, et alors (4.26) devient :

$$\frac{E[\exp(-aA^+_{\tau_1} - bA^-_{\tau_1})]}{E[\exp(-bA^-_{\tau_1})]} = \exp\left(-\int\limits_0^{+\infty} (1-e^{-ay})\frac{1}{4\sqrt{\pi y^3}} dy\right).$$

On retrouve dans l'égalité (4.4.2) que $A^+_{\tau_1}$ et $A^-_{\tau_1}$ sont indépendantes, et on obtient finalement :

$$E[\exp(-aA^+_{\tau_1})] = \exp\left(-\int\limits_0^{+\infty} (1-e^{-ay})\frac{1}{4\sqrt{\pi y^3}} dy\right),$$

On obtient ainsi la mesure de Lévy du processus $(A^+_{\tau_\ell}; \ell \geq 0)$. En plus, par un argument de symétrie et grâce à l'indépendance entre $A^+_{\tau_\ell}$ et $A^-_{\tau_\ell}$, on obtient comme mesure de Lévy conjointe des temps passés positif et négatif :

$$\nu_{\frac{1}{2}}(dx, dy) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(x^{-3/2}\, dx\, \delta_0(dy) + y^{-3/2}\, \delta_0(dx)\, dy \right), \tag{4.28}$$

où δ_0 est la mesure de Dirac en 0.

Le cas $\alpha \neq 2$

Maintenant, dans le but d'identifier la mesure ν_γ, on fera une intégration par parties dans le coté droit de l'identité (4.26) du lemme 4.16.

Lemme 4.17. *Pour tout $a, b > 0$:*

$$\frac{E[\exp(-aA^+_{\tau_1} - bA^-_{\tau_1})]}{E[\exp(-bA^-_{\tau_1})]} = \exp\left(-\frac{(1-\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-bu}(1-e^{-ay}) \frac{\partial H_\gamma}{\partial u}(u,y)dudy \right). \tag{4.29}$$

Démonstration. Tout d'abord, réecrivons H_γ, grâce au changement de variable $v = z/u$, comme :

$$H_\gamma(u, y) = -\int_0^1 (1-v)^{\gamma-1} u^\gamma \frac{\partial F_\gamma}{\partial y}(y, uv)dv. \tag{4.30}$$

D'autre part, d'après la définition de F_γ (voir (4.24)), on a :

$$\frac{\partial F_\gamma}{\partial y}(y, z) = -\frac{1}{y^2} h_\gamma\left(\left(\frac{y}{z}\right)^\gamma \right) + \gamma \frac{(y+z)y^{\gamma-2}}{z^{\gamma+1}} h'_\gamma\left(\left(\frac{y}{z}\right)^\gamma \right),$$

et d'après la définition de h_γ, on montre aisément que :

$$\frac{\partial F_\gamma}{\partial y}(y, uv)u^\gamma = \frac{k_\gamma y^{\gamma-2} v^{\gamma-1}}{\left[(vu)^{2\gamma} - 2\cos(\pi\gamma)(yuv)^\gamma + y^{2\gamma}\right]^2} \Big[(\gamma-1)v^{2\gamma+1}u^{4\gamma} + \gamma y v^{2\gamma} u^{4\gamma-1}$$
$$+ 2\cos(\pi\gamma) y^\gamma v^{\gamma+1} u^{3\gamma} - (\gamma+1) y^{2\gamma} v u^{2\gamma} - \gamma y^{2\gamma+1} u^{2\gamma-1}\Big]$$

Maintenant, écrivons des inégalités qui nous permettent de justifier une intégration par parties dans (4.26).
D'abord, notons que pour $y > 0$ et $u, v \in]0,1[$, on a :

$$\left|\frac{\partial F_\gamma}{\partial y}(y, uv)u^\gamma\right| \leq |k_\gamma| v^{\gamma-1} y^{\gamma-2} \frac{[(1-\gamma) + \gamma y - 2\cos(\pi\gamma)y^\gamma + (\gamma+1)y^{2\gamma} + \gamma y^{2\gamma+1}]}{y^{4\gamma}},$$

d'autre part, comme $\alpha \neq 2$, on a que pour $y > 0$ fixé et pour tout $v \in]0,1[$:

$$(1-v)^{\gamma-1} \frac{\partial F_\gamma}{\partial y}(y, uv)u^\gamma \xrightarrow[u \to 0]{} 0,$$

et comme la fonction $f(v) = v^{\gamma-1}(1-v)^{\gamma-1}$ est intégrable sur $]0,1[$, on déduit du théorème de convergence dominée que

$$H_\gamma(y, u) \xrightarrow[u \to 0]{} 0.$$

D'autre part, si on fixe $y > 0$, on peut démontrer que pour u assez grand et $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon + \gamma < 1$:

$$e^{-bu}|\frac{\partial F_\gamma}{\partial y}(y, uv)u^\gamma| \leq |k_\gamma| y^{\gamma-2}\left(\frac{1}{v^\gamma} + 2\gamma\frac{1}{v^{1-\varepsilon}} + \frac{1}{v^{1-\gamma}}\right),$$

et donc, encore par théorème de convergence dominée on a :

$$e^{-bu}H_\gamma(y, u) \xrightarrow[u\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, le résultat découle d'une intégration par parties dans (4.26). □

Remarque 4.18. D'après (4.24) et (4.30) on a :

$$H_\gamma(u, y) = -\int_0^1 (1-v)^{\gamma-1}\frac{u^\gamma}{(y+uv)^2}\,\ell'_\gamma\left(\frac{y}{y+uv}\right)dv, \tag{4.31}$$

où la fonction ℓ_γ est définie par $\ell_\gamma(u) = (1-u)f_{G_\gamma}(u)$. Alors, si on fait le changement de variable $z = y/(y+uv)$ dans (4.31), on obtient :

$$H_\gamma(u, y) = -\frac{1}{y}\int_0^1 \left([(u+y)z - y]^+\right)^{\gamma-1} z^{1-\gamma}\ell'_\gamma(z)dz. \tag{4.32}$$

Chapitre 5

Valeurs principales associées aux temps locaux

5.1 Le cas du mouvement brownien

Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien réel, issu de 0, et $(L_t^a \equiv L_t^a(B), a \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ une version bicontinue de ses temps locaux. On pose, pour $\ell \geq 0$:

$$\tau_\ell = \inf\{u \geq 0 : L_u^0 > \ell\}.$$

Il est clair que pour tout $\nu \in]0,1[$, les processus :

$$A_\nu(t) \equiv \int_0^t du |B_u|^{\frac{1}{\nu}-2} = \int_{-\infty}^{+\infty} da |a|^{\frac{1}{\nu}-2} L_t^a$$

$$H_\nu(t) \equiv \int_0^t du |B_u|^{\frac{1}{\nu}-2} \mathrm{sgn}(B_u) = \int_{-\infty}^{+\infty} da |a|^{\frac{1}{\nu}-2} \mathrm{sgn}(a) L_t^a,$$

sont à valeurs finies (noter que $\frac{1}{\nu} - 2 > -1$). En plus, on montre que les processus $(A_\nu(\tau_\ell), \ell \geq 0)$ et $(H_\nu(\tau_\ell), \ell \geq 0)$ sont des processus de Lévy stables d'indice ν, le premier étant unilatéral et le deuxième symétrique (voir [30] et [32], par exemple). De façon plus précise, on a :

$$E\left[\exp\left(-\frac{k}{2} A_\nu(\tau_\ell)\right)\right] = e^{-\ell c_\nu k^\nu}, \quad k \geq 0, \tag{5.1}$$

où

$$c_\nu = \frac{\pi}{\nu \sin(\pi\nu)} \left(\frac{\nu^\nu}{\Gamma(\nu)}\right)^2,$$

et

$$E\left[\exp\left(i\frac{k}{2} H_\nu(\tau_\ell)\right)\right] = e^{-\ell c'_\nu |k|^\nu}, \quad k \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

où

$$c'_\nu = c_\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right).$$

Grâce au caractère localement höldérien des temps locaux browniens, d'ordre $\frac{1}{2} - \eta$, pour tout $\eta \in]0, 1/2[$, on peut prolonger la définition de $(H_\nu(t), t \geq 0)$ à tout $\nu \in]0, 2[$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
H_\nu(t) &\equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t du\, |B_u|^{\frac{1}{\nu}-2}\, \mathrm{sgn}(B_u)\, 1_{(|B_u|\geq \varepsilon)} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} da\, |a|^{\frac{1}{\nu}-2}\, \mathrm{sgn}(a)\, L_t^a 1_{(|a|\geq\varepsilon)} \\
&\equiv v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} da\, |a|^{\frac{1}{\nu}-2}\, \mathrm{sgn}(a)\, L_t^a \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} da\, a^{\frac{1}{\nu}-2}\, (L_t^a - L_t^{-a}).
\end{aligned}$$

On montre encore, que pour tout $\nu \in]0,2[$, le processus $(H_\nu(\tau_\ell), \ell \geq 0)$ est un processus stable symétrique, d'indice ν, et la formule (5.2) se prolonge à tout $\nu \in]0,2[$. De cette façon, on arrive (en multipliant par une constante bien choisie s'il le faut) à construire tous les processus stables symétriques d'indice $\nu \in]0,2[$ à partir d'un seul mouvement brownien.

On peut aussi construire les processus stables symétriques d'indice $\nu \in]0,2[$ à partir de deux mouvements browniens réels indépendants B et X, issus de 0. Plus précisément, si on considère $\mu \in]0,1[$, le processus $(X_{A_\mu(\tau_\ell)}; \ell \geq 0)$ est un processus stable symétrique d'indice 2μ.
Dans [9], on s'intéresse à la comparaison, pour tout $\mu \in]0,1[$, de ces deux constructions, c'est-à-dire, $(H_{2\mu}(\tau_\ell); \ell \geq 0)$ et $(X_{A_\mu(\tau_\ell)}; \ell \geq 0)$, ce qui revient à étudier la loi du couple $(H_{2\mu}(\tau_\ell), A_\mu(\tau_\ell))$, pour $\mu \in]0,1[$. Plus précisément, on montre que le processus $(H_{2\mu}(\tau_\ell), A_\mu(\tau_\ell))$ est un processus de Lévy bi-dimensionnel et, à l'aide de la théorie des excursions browniennes, on montre aussi que sa transformée de Fourier-Laplace est donnée par :

$$\begin{aligned}
&E\left[\exp\left(i\lambda H_{2\mu}(\tau_\ell) - \frac{\theta^2}{2} A_\mu(\tau_\ell)\right)\right] \\
&\qquad = \exp\left\{-\frac{\ell}{2}\frac{(4\mu\theta)^{2\mu}}{\Gamma(2\mu)\sin(\pi\mu)}\cosh\left(\frac{\pi\lambda\mu}{\theta}\right) B\left(\mu+\frac{1}{2}+i\frac{\lambda\mu}{\theta}; \mu+\frac{1}{2}-i\frac{\lambda\mu}{\theta}\right)\right\}, \quad (5.3)
\end{aligned}$$

où

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Remarque 5.1. Si on utilise la formule-clé exponentielle de la théorie des excursions browniennes pour le côté gauche de l'égalité (5.3), on trouve :

$$E\left[\exp\left(i\lambda H_{2\mu}(\tau_\ell) - \frac{\theta^2}{2}A_\mu(\tau_\ell)\right)\right] = \exp\left\{-\ell\int n(de)\left(1-\exp\left[i\lambda h_{2\mu}(e) - \frac{\theta^2}{2}a_\mu(e)\right]\right)\right\},$$

où n désigne la mesure d'Itô des excursions du mouvement brownien et les variables aléatoires $h_{2\mu}$ et a_μ sont définies par :

$$h_{2\mu}(e) = \mathrm{sgn}(e) \int_0^{V(e)} |e(s)|^{(1/2\mu)-2}\, ds; \quad a_\mu(e) = \int_0^{V(e)} |e(s)|^{(1/\mu)-2}\, ds,$$

où e désigne une excursion générique et $V(e)$ sa durée de vie. Ce qui revient à dire que la mesure de Lévy du processus $(H_{2\mu}(\tau_\ell), A_\mu(\tau_\ell); \ell \geq 0)$ est la loi de $(h_{2\mu}, a_\mu)$ sous n et en fait, pour démontrer l'égalité (5.3), on montre que cette loi est donnée par :

$$n(h_{2\mu} \in dv) = \frac{1}{2} \frac{(4\mu)^{4\mu}}{2^{2\mu}\Gamma(2\mu)} \frac{dv}{|v|^{2\mu+1}};$$

$$n\left(\exp(-\frac{\theta^2}{2} a_\mu) | h_{2\mu} = v\right) = \left(\frac{\theta|v|}{4\mu \mathrm{sh}(\frac{\theta|v|}{4\mu})}\right)^{2\mu+1}.$$

5.2 Généralisation du résultat aux processus de Lévy

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus de Lévy d'exposant caractéristique Ψ. Supposons qu'il existe $q > 0$ tel que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{|q + \Psi(\xi)|} < \infty. \tag{5.4}$$

Comme dans le cas des processus stables, cette condition entraîne l'existence des temps locaux $(L_t^x, x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ pour le processus X (voir [6], chapitre V).
Dans ce cas (voir [6], proposition 6, p. 135), le processus

$$\begin{aligned} H_t^\varepsilon &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{ds}{X_s} 1_{\{|X_s| > \varepsilon\}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L_t^x}{x} 1_{\{|x| > \varepsilon\}} dx, \end{aligned}$$

converge quand ε tend vers 0, uniformément sur les intervalles compacts en t, dans $L^2(\mathbb{P})$, vers le processus

$$H_t \equiv v.p. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L_t^x}{x} dx.$$

La condition (5.4) est vérifiée en particulier dans le cas où X est un processus stable d'indice $\alpha \in (1, 2]$, puisque $\Psi(t) = c|t|^\alpha (1 - i\beta \mathrm{sgn}(t) \tan(\pi\alpha/2))$ où $c > 0$ et $\beta \in [-1, 1]$.

On pose pour $\ell \geq 0$:

$$\tau_\ell = \inf\{u \geq 0 : L_u^0 > \ell\}.$$

Fitzsimmons et Getoor dans [21] ont démontré que dans le cas où X est un processus stable, symétrique, d'indice $\alpha \in]1, 2]$, la transformée de Fourier-Laplace du couple $(\tau_\ell, H_{\tau_\ell})$ est donnée par :

$$E[\exp(-q\tau_\ell + i\lambda H_{\tau_\ell})] = \exp(-\ell\lambda \coth(\lambda\kappa(q))), \qquad q > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \ell > 0, \tag{5.5}$$

où :

$$\kappa(q) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{q + \Psi(\xi)} < \infty. \tag{5.6}$$

Ce résultat à été généralisé par Bertoin (voir [5] ou [6], chapitre V, théorème 7) dans le cas où X est un processus de Lévy vérifiant (5.4), à l'aide de la formule de Feynman-Kac. Il faut juste changer $\Psi(\xi)$ par $\Psi(-\xi)$ dans (5.6) pour que (5.5) reste vraie.

Notons que si on fait tendre q vers 0 dans (5.5) on obtient :

$$E[\exp(i\lambda H_{\tau_\ell})] = \exp(-\ell|\lambda|), \lambda \in \mathbb{R}, \ell > 0, \tag{5.7}$$

et d'autre part si on prend $\lambda = 0$ dans (5.5) on obtient :

$$E[\exp(-q\tau_\ell)] = \exp(-\ell/\kappa(q)), \qquad q > 0, \ell > 0. \tag{5.8}$$

5.3 Le cas stable d'indice $\alpha \in]1, 2]$

Désormais, on suppose que X est un processus stable symétrique, d'indice $\alpha \in]1, 2]$. Dans ce cas, on sait que son exposant caractéristique est de la forme $\Psi(\lambda) = c|\lambda|^\alpha$ où $c > 0$. Grâce à la propriété höldérienne d'ordre η, pour tout $\eta \in]0, (\alpha - 1)/2[$ pour les temps locaux de X, on peut définir, pour $\nu \in]0, 2[$, le processus $(H_\nu^{(\alpha)}(t), t \geq 0)$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
H_\nu^{(\alpha)}(t) &\equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t |X_u|^{\frac{\alpha-1}{\nu} - \alpha} \operatorname{sgn}(X_u)\, 1_{(|X_u| \geq \varepsilon)}\, du \\
&= v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\frac{\alpha-1}{\nu} - \alpha} \operatorname{sgn}(x)\, L_t^x\, dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} x^{\frac{\alpha-1}{\nu} - \alpha} (L_t^x - L_t^{-x})\, dx \\
&= \int_0^{+\infty} x^{\frac{\alpha-1}{\nu} - \alpha} (L_t^x - L_t^{-x})\, dx.
\end{aligned}$$

On définit aussi le processus $(H_\nu^{(\alpha)}(\varepsilon, t), t \geq 0)$ par :

$$\begin{aligned}
H_\nu^{(\alpha)}(\varepsilon, t) &\equiv \int_0^t |X_u|^{\frac{\alpha-1}{\nu} - \alpha} \operatorname{sgn}(X_u)\, 1_{(|X_u| \geq \varepsilon)}\, du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\frac{\alpha-1}{\nu} - \alpha} \operatorname{sgn}(x)\, 1_{(|x| \geq \varepsilon)}\, L_t^x\, dx.
\end{aligned}$$

Et alors, par définition, on a presque sûrement, pour tout $t \geq 0$:

$$H_\nu^{(\alpha)}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\nu^{(\alpha)}(\varepsilon, t) \tag{5.9}$$

Lemme 5.2. *Le processus* $(H_\nu^{(\alpha)}(\tau_\ell), \ell \geq 0)$ *est un processus stable symétrique d'indice* ν.

Démonstration. Notons $L_t^x[X]$, $\tau_\ell[X]$, $H_\nu^{(\alpha)}(t)[X]$ et $H_\nu^{(\alpha)}(\varepsilon,t)[X]$ pour L_t^x, τ_ℓ, $H_\nu^{(\alpha)}(t)$ et $H_\nu^{(\alpha)}(\varepsilon,t)$ respectivement, pour rendre explicite la dépendance en le processus X.
Soit $a > 0$ et $t \geq 0$. Remarquons d'abord que :

$$\begin{aligned} L_{at}[X] &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{at} 1_{\{|X_s| \leq \varepsilon\}} ds \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{a}{2\varepsilon} \int_0^{t} 1_{\{|X_{av}| \leq \varepsilon\}} dv \\ &= a^{1-1/\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2a^{-1/\alpha}\varepsilon} \int_0^{t} 1_{\{|a^{-1/\alpha} X_{av}| \leq a^{-1/\alpha}\varepsilon\}} dv, \end{aligned}$$

et alors :

$$L_{at}[X] = a^{1-1/\alpha} L_t[X^a], \tag{5.10}$$

où, étant donné $b > 0$, le processus X^b désigne le processus défini par :

$$X_t^b = b^{-1/\alpha} X_{bt}, \qquad t \geq 0.$$

Rappelons que la propriété de scaling d'indice α pour X, signifie que pour tout $b > 0$ les processus X et X^b ont la même loi.
Maintenant grâce à l'identité (5.10) et si on note $a_\alpha = a^{\alpha/(\alpha-1)}$, on a :

$$\begin{aligned} \tau_{a\ell}[X] &= \inf\{u > 0 : L_u[X] > a\ell\} \\ &= \inf\{u > 0 : \frac{1}{a} L_u[X] > \ell\} \\ &= \inf\{u > 0 : L_{{a_\alpha}^{-1}u}[X^{a_\alpha}] > \ell\} \\ &= a_\alpha \inf\{v > 0 : L_v[X^{a_\alpha}] > \ell\}, \end{aligned}$$

et alors par définition de $\tau_\ell[\cdot]$, on a :

$$\tau_{a\ell}[X] = a_\alpha \tau_\ell[X^{a_\alpha}].$$

Grâce à la dernière égalité et à la définition de $H_\nu^{(\alpha)}(\varepsilon, \cdot)$:

$$\begin{aligned}
H_\nu^{(\alpha)}(\varepsilon, \tau_{a\ell}[X])[X] &= H_\nu^{(\alpha)}(\varepsilon, a_\alpha \tau_\ell[X^{a_\alpha}])[X] \\
&= \int_0^{a_\alpha \tau_\ell[X^{a_\alpha}]} |X_u|^{\frac{\alpha-1}{\nu}-\alpha} \operatorname{sgn}(X_u)\, 1_{(|X_u|\geq\varepsilon)}\, du \\
\text{(changement de variable } u = a_\alpha v) &= a_\alpha \int_0^{\tau_\ell[X^{a_\alpha}]} |X_{a_\alpha v}|^{\frac{\alpha-1}{\nu}-\alpha} \operatorname{sgn}(X_{a_\alpha v})\, 1_{(|X_{a_\alpha v}|\geq\varepsilon)}\, dv \\
&= a^{1/\nu} \int_0^{\tau_\ell[X^{a_\alpha}]} |X_v^{a_\alpha}|^{\frac{\alpha-1}{\nu}-\alpha} \operatorname{sgn}(X_v^{a_\alpha})\, 1_{(|X_v^{a_\alpha}|\geq a^{-1/(\alpha-1)}\varepsilon)}\, dv,
\end{aligned}$$

et alors, par définition :

$$a^{-1/\nu} H_\nu^{(\alpha)}(\varepsilon, \tau_{a\ell}[X])[X] = H_\nu^{(\alpha)}(a^{-1/(\alpha-1)}\varepsilon, \tau_\ell[X^{a_\alpha}])[X^{a_\alpha}],$$

ce qui ajouté à la propriété de scaling d'indice α du processus X, entraîne la propriété de scaling, d'indice ν, du processus $H_\nu^{(\alpha)}(\tau_\cdot)$. Soient maintenant $s \geq 0$ et $t \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}
L_{t+s} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{t+s} 1_{\{|X_u|\leq\varepsilon\}} du \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \left\{ \int_0^t 1_{\{|X_u|\leq\varepsilon\}} du + \int_t^{t+s} 1_{\{|X_u|\leq\varepsilon\}} du \right\} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \left\{ \int_0^t 1_{\{|X_u|\leq\varepsilon\}} du + \int_0^{s} 1_{\{|X_{v+t}|\leq\varepsilon\}} dv \right\},
\end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$L_{t+s} = L_t + L_s \circ \theta_t.$$

En fait, on peut aller un peu plus loin et montrer que pour tout temps d'arrêt T et toute variable aléatoire $S \geq 0$, on a :

$$L_{T+S} = L_T + L_S \circ \theta_T,$$

d'où on peut obtenir que pour tout $\ell \geq 0$ et $u \geq 0$:

$$\tau_{\ell+u} = \tau_\ell + \tau_u \circ \theta_{\tau_\ell}.$$

De la définition de $H_\nu^{(\alpha)}(\varepsilon, \cdot)$, on montre ensuite que :

$$H_\nu^{(\alpha)}(\varepsilon, \tau_{\ell+u}) = H_\nu^{(\alpha)}(\varepsilon, \tau_\ell) + H_\nu^{(\alpha)}(\varepsilon, \tau_u) \circ \theta_{\tau_\ell}.$$

Il est alors facile, grâce à la propriété de Markov forte pour le processus X, d'obtenir la propriété d'accroissements indépendants et stationnaires pour le processus $H_\nu^{(\alpha)}(\varepsilon, \tau_\cdot)$ et en conséquence pour le processus $H_\nu^{(\alpha)}(\tau_\cdot)$. $\square$

Comme dans le cas brownien, pour $\nu \in]0,1[$, on peut définir aussi le processus $(A_\nu^{(\alpha)}(t), t \geq 0)$:

$$\begin{aligned} A_\nu^{(\alpha)}(t) &\equiv \int_0^t |X_u|^{\frac{\alpha-1}{\nu}-\alpha} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\frac{\alpha-1}{\nu}-\alpha} L_t^x dx, \end{aligned}$$

car $\frac{\alpha-1}{\nu} - \alpha > -1$.

On s'intéresse, pour $\nu \in]0,2[$, $\alpha \in]1,2]$, et $\gamma \in]0, \frac{1}{\nu}[$, à la loi du couple $\Big(H_\nu^{(\alpha)}(\tau_\ell), A_{\gamma\nu}^{(\alpha)}(\tau_\ell)\Big)$.

Remarque 5.3. La formule (5.3) correspond à l'étude du cas $\alpha = 2$ et $\gamma = 1/2$ et la formule (5.5) au cas $\nu = 1$ et $\gamma = (\alpha-1)/\alpha$.

5.4 Valeurs principales à l'aide de la formule de Feynman-Kac

Soient $q > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\beta \in]0, \frac{\alpha+1}{2}[$. Notons que si $\nu(\beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta}$ alors $\nu(\beta) \in]0,2[$ et donc $H_{\nu(\beta)}^{(\alpha)}$ est bien défini.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la loi du couple $\Big(H_{\nu(\beta)}^{(\alpha)}(\tau_\ell), \tau_\ell\Big)$, c'est-à-dire, le cas $\gamma = \frac{(\alpha-1)}{\alpha\nu(\beta)}$. Pour cela, on suit le schéma de la démonstration de Bertoin de (5.5) pour voir ce que l'on obtient dans notre cas.

Pour $\varepsilon > 0$, on considère les fonctions $h_\varepsilon^\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f_\varepsilon^\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définies par :

$$h_\varepsilon^\beta(x) = \frac{\mathrm{sgn}(x)}{|x|^\beta} 1_{\{|x| \geq \varepsilon\}} \quad \text{et} \quad f_\varepsilon^\beta(x) = q - i\lambda h_\varepsilon^\beta(x).$$

Notons que f_ε^β vérifie :

$$0 < q = \mathrm{Re}(f_\varepsilon^\beta) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f_\varepsilon^\beta) \text{ est bornée.}$$

On peut donc considérer $A^{f_\varepsilon^\beta}$ comme dans la section 3.2, c'est-à-dire :

$$A_t^{f_\varepsilon^\beta} = \int_0^t f_\varepsilon^\beta(X_s) ds = qt - i\lambda H_\varepsilon^\beta(t), \tag{5.11}$$

où :

$$H_\varepsilon^\beta(t) = \int_0^t h_\varepsilon^\beta(X_s) ds. \tag{5.12}$$

D'après les résultats de la section 3.2, on sait qu'il existe une unique constante complexe $c_\varepsilon^\beta = c_{f_\varepsilon^\beta}$ vérifiant :

$$E[\exp(-A_{\tau_\ell}^{f_\varepsilon^\beta})] = e^{-c_\varepsilon^\beta \ell}, \tag{5.13}$$

et que si on définit $g_\varepsilon^\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par :

$$g_\varepsilon^\beta(x) = g_{f_\varepsilon^\beta}(x) = E_x[\exp(-A_{T_{\{0\}}}^{f_\varepsilon^\beta})], \tag{5.14}$$

le processus $(g_\varepsilon^\beta(X_t)\exp(c_\varepsilon^\beta L_t^0 - A_t^{f_\varepsilon^\beta}), t \geq 0)$ est une P_x-martingale pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Maintenant, on définit la mesure de Radon complexe μ_ε^β par :

$$\mu_\varepsilon^\beta(dy) = -c_\varepsilon^\beta \delta_0(dy) + f_\varepsilon^\beta(y)dy.$$

Notons que :

$$f_\varepsilon^\beta \in L^1_{loc}(\mathbb{R}), \quad f_\varepsilon^\beta \text{ est bornée} \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}(f_\varepsilon^\beta) > 0,$$

et donc, d'après la remarque 3.3, μ_ε^β satisfait aux conditions (3.12) et (3.13) (pour $r > |c_\varepsilon^\beta|$). Comme de plus, g_ε^β est bornée, on peut appliquer la formule de Feynman-Kac à $(g_\varepsilon^\beta, \mu_\varepsilon^\beta)$ pour obtenir :

$$U^r((V^r_{\mu_\varepsilon^\beta} g_\varepsilon^\beta)\mu_\varepsilon^\beta) = U^r g_\varepsilon^\beta - V^r_{\mu_\varepsilon^\beta} g_\varepsilon^\beta. \tag{5.15}$$

Grâce à la propriété de martingale pour le processus $\left(g_\varepsilon^\beta(X_t)\exp\left(c_\varepsilon^\beta L_t^0 - A_t^{f_\varepsilon^\beta}\right), t \geq 0\right)$, on obtient :

$$V^r_{\mu_\varepsilon^\beta} g_\varepsilon^\beta = \frac{g_\varepsilon^\beta}{r},$$

et donc la formule (5.15) devient :

$$U^r(g_\varepsilon^\beta \mu_\varepsilon^\beta) = rU^r g_\varepsilon^\beta - g_\varepsilon^\beta. \tag{5.16}$$

Maintenant, si on applique la transformée de Fourier dans cette équation, on obtient (voir [6], chapitre I, proposition 9) :

$$\mathcal{F}(g_\varepsilon^\beta \mu_\varepsilon^\beta)(\xi) = -\psi(\xi)\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta(\xi), \tag{5.17}$$

où $\psi(\xi) = c|\xi|^\alpha$ est l'exposant caratéristique du processus X.

Lemme 5.4. *On a* $g_\varepsilon^\beta(0) = 1$ *et* $\sup_{\varepsilon>0} g_\varepsilon^\beta \in L^p(\mathbb{R})$ *pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$.

Démonstration. La première assertion découle de la définition de g_ε^β. Pour la deuxième, il suffit de noter que :

$$|g_\varepsilon^\beta(x)| = |E_x[\exp(-A_{T_{\{0\}}}^{f_\varepsilon^\beta})]| \leq E_x[\exp(-qT_{\{0\}})] = \frac{u^q(-x)}{u^q(0)},$$

et se souvenir que $u^q \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. □

Dans la suite on va se restreindre au cas $\beta \in]\frac{1}{2}, 1]$.

En s'appuyant sur l'identité $\mathcal{F}(ab) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}a * \mathcal{F}b$ valide pour $a, b \in L^2(\mathbb{R})$ et en remarquant que $h_\varepsilon^\beta \in L^2(\mathbb{R})$, car $\beta > 1/2$, l'équation (5.17) devient :

$$(q + \psi(\xi))\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta(\xi) = c_\varepsilon^\beta + \frac{i\lambda}{2\pi}\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta * \mathcal{F}h_\varepsilon^\beta(\xi). \tag{5.18}$$

Remarque 5.5. Notons que $H_\varepsilon^\beta(\cdot) = H_{\nu(\beta)}^{(\alpha)}(\varepsilon, \cdot)$, car $\beta = \alpha - \frac{\alpha-1}{\nu(\beta)}$. On a donc :

$$H_{\nu(\beta)}^{(\alpha)}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon^\beta(t).$$

Remarque 5.6. D'après les résultats de la section 3.2, $(A_{\tau_\ell}^{f_\varepsilon^\beta}, \ell \geq 0)$ est un processus de Lévy et c_ε^β correspond à la valeur de son exposant caractéristique en 1. On pourrait aussi voir c_ε^β comme la valeur en (q, λ) de l'exposant caractéristique du processus de Lévy bidimensionnel $\Big((\tau_\ell, H_\varepsilon^\beta(\tau_\ell)), \ell \geq 0\Big)$.

On étudie la loi du processus $\Big((\tau_\ell, H_{\nu(\beta)}^{(\alpha)}(\tau_\ell)), \ell \geq 0\Big)$. On se ramènera donc, à l'étude quand ε tend vers 0 de c_ε^β.

Lemme 5.7. *On a pour $\xi > 0$:*

$$\mathcal{F}h_\varepsilon^\beta(\xi) = \frac{2i\beta sgn(\xi)}{|\xi|^{1-\beta}} \int_{\varepsilon|\xi|}^{\infty} \frac{\cos(\varepsilon|\xi|) - \cos(v)}{v^{\beta+1}} dv \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{2i\beta a_\beta sgn(\xi)}{|\xi|^{1-\beta}},$$

où :

$$a_\beta = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(v)}{v^{\beta+1}} dv.$$

Démonstration. Il suffit de noter que :

$$\begin{aligned}
\int_{-M}^{M} e^{ix\xi} h_\varepsilon^\beta(x) dx &= 2i \int_\varepsilon^M \frac{\sin(x\xi)}{x^\beta} dx \\
&= 2i \left[\frac{\cos(\varepsilon|\xi|) - \cos(M\xi)}{\xi M^\beta} + \frac{\beta}{\xi} \int_{\varepsilon|\xi|}^{\infty} \frac{\cos(\varepsilon|\xi|) - \cos(x\xi)}{x^{\beta+1}} dx \right],
\end{aligned}$$

puis de faire le changement de variable $v = x|\xi|$ et de faire tendre M vers l'infini. □

Lemme 5.8. *On a les inégalités suivantes :*

1. $|\mathcal{F}h_\varepsilon^\beta(\xi)| \leq \frac{2\beta a_\beta}{|\xi|^{1-\beta}} + 2\varepsilon^{1-\beta}$.
2. $|\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta(\xi)| \leq \frac{||u^q||_1}{u^q(0)}$.
3. $|\mathcal{F}(g_\varepsilon^\beta \mu_\varepsilon^\beta)(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^q(x)}{u^q(0)} |\mu_\varepsilon^\beta(dx)| < +\infty$.
4. $|\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta(\xi)| \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^q(x)}{u^q(0)} |\mu_\varepsilon^\beta(dx)|}{\psi(\xi)}$.

On déduit des inégalités 2 et 4 que $\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta \in L^1(\mathbb{R})$.

Démonstration. 1. On a :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}h_\varepsilon^\beta(\xi)| &\leq \frac{2\beta}{|\xi|^{1-\beta}} \left[\left| \int_{\varepsilon|\xi|}^{\infty} \frac{1 - \cos(v)}{v^{\beta+1}} dv \right| + \left| \int_{\varepsilon|\xi|}^{\infty} \frac{\cos(\varepsilon|\xi|) - 1}{v^{\beta+1}} dv \right| \right] \\
&\leq \frac{2\beta a_\beta}{|\xi|^{1-\beta}} + 2\varepsilon^{1-\beta} \left(\frac{1 - \cos(\varepsilon|\xi|}{\varepsilon|\xi|)} \right).
\end{aligned}$$

L'inégalité découle du fait que $0 \leq \frac{1-\cos(x)}{x} \leq 1$ pour tout $x > 0$.

2 Il suffit de noter que :

$$|\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g_\varepsilon^\beta(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^q(-x)}{u^q(0)}dx.$$

3 Directe.

4 Il suffit d'utiliser l'identité (5.17) et l'inégalité 3.

□

Lemme 5.9. *On a pour* $0 < \varepsilon < 1$ *:*

$$|\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta * \mathcal{F}h_\varepsilon^\beta(\xi)| \leq 2(1+\beta a_\beta)||\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta||_1 + 4a_\beta\frac{||u^q||_1}{u^q(0)}. \tag{5.19}$$

Démonstration. De la définition de la convolution et de l'inégalité 1 du lemme précédent, on trouve :

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta * \mathcal{F}h_\varepsilon^\beta(\xi)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\beta a_\beta}{|x|^{1-\beta}} + 2\right)|\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta(\xi - x)|dx \\ &\leq 2\beta a_\beta \left(\int_{-1}^{1} \frac{|\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta(\xi - x)|}{|x|^{1-\beta}}dx + ||\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta||_1\right) + 2||\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta||_1,\end{aligned}$$

et le résultat découle de l'inégalité 2 du lemme précédent. □

Lemme 5.10. *Pour* q *assez grand, il existe une constante* k *(dépendant de* q *et* β*) telle que :*

$$|\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta(\xi)| \leq \frac{k}{q+\psi(\xi)}. \tag{5.20}$$

Démonstration. D'après l'équation (5.18) et le lemme 5.9, on a :

$$||\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta||_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta(\xi)|d\xi \leq \left(|c_\varepsilon^\beta| + \frac{\lambda}{2\pi}\left(2(1+\beta a_\beta)||\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta||_1 + 4a_\beta\frac{||u^q||_1}{u^q(0)}\right)\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{q+\psi(\xi)}.$$

Ainsi, comme $\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta \in L^1(\mathbb{R})$, si q est assez grand pour vérifier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{q+\psi(\xi)} \leq \frac{\pi}{2\lambda(1+a_\beta)} \wedge 1,$$

on a :

$$||\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta||_1 \leq 2\left(|c_\varepsilon^\beta| + \frac{||u^q||_1}{u^q(0)}\right).$$

On montre à l'aide de (5.9) et (5.13) que $\{c_\varepsilon^\beta\}_{\varepsilon>0}$ est bornée. On en déduit que $||\mathcal{F}g_\varepsilon^\beta||_1$ est uniformément bornée par rapport à ε. On obtient donc le résultat, à partir de (5.19) et (5.18). □

Proposition 5.11. *Le processus* $\left((\tau_\ell, H^{(\alpha)}_{\nu(\beta)}(\tau_\ell)), \ell \geq 0\right)$ *est un processus de Lévy bidimensionnel. Dans le cas où* $\beta \in]1/2, 1]$, *son exposant de Laplace-Fourier,* $c^\beta = c^\beta(\cdot,\cdot)$, *vérifie :*

$$(q+\psi(\xi))\mathcal{F}g^\beta(\xi) = c^\beta - \frac{\lambda\beta a_\beta}{\pi}\mathcal{F}g^\beta * \frac{sgn(\cdot)}{|\cdot|^{1-\beta}}(\xi), \tag{5.21}$$

où $g^\beta(x) = g^\beta(q,\lambda;x) = E_x\left[\exp\left(-qT_{\{0\}} + i\lambda H^{(\alpha)}_{\nu(\beta)}\left(T_{\{0\}}\right)\right)\right]$.

Démonstration. Supposons d'abord q assez grand pour vérifier l'inégalité du lemme 5.10. On a d'après (5.9) et (5.13) que c^β_ε converge vers c^β. De même, g^β_ε converge ponctuellement vers la fonction g^β. D'après le lemme 5.4 et grâce au théorème de convergence dominée, cette convergence a lieu aussi dans L^1. On en déduit la convergence uniforme de $\mathcal{F}g^\beta_\varepsilon$ vers $\mathcal{F}g^\beta$. Grâce au lemme 5.10, cette convergence est vraie aussi dans L^1.
Ainsi, si on fait tendre ε vers 0 dans (5.18), on obtient à l'aide du lemme 5.7, l'identité (5.21). Ce qui montre le résultat pour q assez grand.
Pour montrer le résultat pour tout $q > 0$, il suffit de noter que tous les termes intervenant dans l'identité (5.21) sont analytiques en la variable $q > 0$. □

Remarque 5.12. Dans le cas où $\beta \in]1/2, 1[$, on a (voir [24], p.201), que pour tout $r > 1/(1-\beta)$:

$$\left\|\mathcal{F}g^\beta * \frac{\mathrm{sgn}(\cdot)}{|\cdot|^{1-\beta}}\right\|_r \leq C||\mathcal{F}g^\beta||_p,$$

où $p = r/(1+r\beta) > 1$.

5.5 Quelques considérations sur la mesure d'excursion dans le cas symétrique stable

Soit $X = (X_t, t \geq 0)$ un processus symétrique stable, d'indice $\alpha \in]1, 2]$.
Considérons les variables aléatoires suivantes, définies sur l'espace des excursions :

$$\begin{aligned} V(e) &= \inf\{t > 0 : e(t) = 0\} \\ h_v(e) &= v.p. \int_0^v \frac{du}{e(u)}, \qquad 0 \leq v \leq V(e), \end{aligned}$$

et on note pour simplifier $h_V(e)$ au lieu de $h_{V(e)}(e)$.
Nous allons obtenir des propriétés pour la mesure d'excursion grâce à la formule (5.5). Notons d'abord que :

$$\begin{aligned} E[\exp(-q\tau_\ell + i\lambda H_{\tau_\ell})] &= E[\exp(-q\tau_\ell + i\frac{\lambda}{\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_0^{\tau_\ell}\frac{du}{X_u})] \\ &= E[\exp(-q\sum_{s\leq\ell}V(e_s) + i\frac{\lambda}{\pi}\sum_{s\leq\ell}h_V(e_s))] \\ &= \exp\left(-\ell\int n_\alpha(de)(1-e^{-qV(e)+i\frac{\lambda}{\pi}h_V(e)})\right), \end{aligned}$$

la dernière égalité est due à la formule-clé exponentielle pour la mesure d'excursion.

Alors, de l'équation (5.5) on peut conclure :

$$\int n_\alpha(de)(1 - e^{-qV(e)+i\frac{\lambda}{\pi}h_V(e)}) = \lambda \coth(\lambda\kappa(q)), \qquad q > 0, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.22}$$

En particulier, quand λ tend vers 0, on a :

$$\int n_\alpha(de)(1 - e^{-qV(e)}) = \frac{1}{\kappa(q)}, \qquad q > 0, \tag{5.23}$$

et alors :

$$\int_0^{+\infty} n_\alpha(V \in dv)(1 - e^{-qv}) = \alpha \sin(\pi/\alpha) c^{1/\alpha} q^{(\alpha-1)/\alpha}, \qquad q > 0,$$

d'où, on retrouve (3.27)
Si, maintenant on fait tendre q vers 0+ dans (5.22) , comme dans ce cas $\kappa(q)$ tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\int n_\alpha(de)(1 - e^{i\frac{\lambda}{\pi}h_V(e)}) = |\lambda|, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Et alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n_\alpha(h_V \in dh)(1 - e^{i\frac{\lambda}{\pi}h}) = |\lambda|, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

d'où, on obtient :

$$n_\alpha(h_V \in dh) = \frac{1}{h^2} dh, \qquad h \in \mathbb{R}. \tag{5.24}$$

En particulier, cela ne dépend pas de α.

Remarque 5.13. Considérons le cas $\alpha = 2$. Soient $\beta \in]0, 1[$, $\bar{c} > 0$ et S_β une variable aléatoire stable d'indice β (à revoir), indépendante de V et h_V sous n_2, alors on a :

$$\begin{aligned} \int n_2(de)(1 - e^{-qS_\beta.(\bar{c}V(e))^{1/\beta}+i\frac{\lambda}{\pi}h_V(e)}) &= \int n_2(de)(1 - e^{-q^\beta \bar{c}V(e)+i\frac{\lambda}{\pi}h_V(e)}) \\ &= \lambda \coth\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{q^\beta \bar{c}}}\right), \end{aligned} \tag{5.25}$$

la dernière égalité étant donnée par (5.22).

Maintenant on considère $\alpha \in]1, 2[$ et on pose $\bar{c} = \frac{\alpha \sin(\pi/\alpha)}{2}$ et $\beta = 2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)$. On compare (5.25) avec (5.22) et on obtient que le couple $(S_\beta.(\bar{c}V)^{1/\beta}, h_V)$ sous n_2 a même loi que le couple (V, h_V) sous n_α.

Remarque 5.14. Dans l'article [21] on trouve les identités suivantes pour le processus H évalué en les temps $\mathbf{e}_p$ et $g_{\mathbf{e}_p}$, où $\mathbf{e}_p$ est un temps exponentiel indépendant de paramètre p :

$$E[\exp(i\lambda H_{\mathbf{e}_p})] = \operatorname{sech}(\lambda\kappa(p)), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5.26}$$

$$E[\exp(i\lambda H_{g_{\mathbf{e}_p}})] = \frac{\tanh(\lambda\kappa(p))}{\lambda\kappa(p)}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5.27}$$

$$E[\exp(i\lambda H_{g_{\mathbf{e}_p}} + i\mu(H_{\mathbf{e}_p} - H_{g_{\mathbf{e}_p}}))] = \frac{\tanh(\lambda\kappa(p))}{\lambda} \frac{\mu}{\sinh(\mu\kappa(p))}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{5.28}$$

En particulier les variables $H_{g_{\mathbf{e}_p}}$ et $H_{\mathbf{e}_p} - H_{g_{\mathbf{e}_p}}$ sont indépendantes.
Notons que :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p}E[\exp(i\lambda H_{\mathbf{e}_p})] &= E\left[\int_0^{+\infty} \exp\left(-pt + i\lambda H_t\right)\, dt\right] \\
&= E\left[\int_0^{+\infty} \exp\left(-pt + i\frac{\lambda}{\pi} v.p. \int_0^t \frac{1}{X_u}\, du\right)\, dt\right] \\
&= E\left[, \sum_{s>0} \int_{\tau_{s-}}^{\tau_s} \exp\left(-pt + i\frac{\lambda}{\pi}(v.p. \int_0^{\tau_{s-}} \frac{1}{X_u}\, du + v.p. \int_{\tau_{s-}}^{t} \frac{1}{X_u}\, du)\right)\, dt\right] \\
&= E\left[\sum_{s>0} \exp\left(i\lambda H_{\tau_{s-}}\right) \int_{\tau_{s-}}^{\tau_s} \exp\left(-pt + i\frac{\lambda}{\pi} v.p. \int_{\tau_{s-}}^{t} \frac{1}{X_u}\, du\right)\, dt\right] \\
&= E\left[\sum_{s>0} \exp\left(i\lambda H_{\tau_{s-}}\right) \int_{\tau_{s-}}^{\tau_s} \exp\left(-pt + i\frac{\lambda}{\pi} v.p. \int_0^{t-\tau_{s-}} \frac{1}{e_s(u)}\, du\right)\, dt\right] \\
&= E\left[\sum_{s>0} \exp\left(i\lambda H_{\tau_{s-}}\right) \int_0^{V(e_s)} \exp\left(-p(t+\tau_{s-}) + i\frac{\lambda}{\pi} v.p. \int_0^{t} \frac{1}{e_s(u)}\, du\right)\, dt\right] \\
&= E\left[\sum_{s>0} \exp\left(i\lambda H_{\tau_{s-}} - p\tau_{s-}\right) \int_0^{V(e_s)} \exp\left(-pt + i\frac{\lambda}{\pi} v.p. \int_0^{t} \frac{1}{e_s(u)}\, du\right)\, dt\right],
\end{aligned}
$$

et donc, à l'aide de la formule-clé additive :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p}E[\exp(i\lambda H_{\mathbf{e}_p})] &= E\left[\int_0^{+\infty} ds \int n_\alpha(de) \exp\left(i\lambda H_{\tau_s} - p\tau_s\right) \int_0^{V(e)} \exp\left(-pt + i\frac{\lambda}{\pi} v.p. \int_0^{t} \frac{1}{e(u)}\, du\right)\, dt\right] \\
&= E\left[\int_0^{+\infty} ds \int n_\alpha(de) \exp\left(i\lambda H_{\tau_s} - p\tau_s\right) \int_0^{V(e)} \exp\left(-pt + i\frac{\lambda}{\pi} h_t(e)\right)\, dt\right] \\
&= \int_0^{+\infty} E\left[\exp\left(i\lambda H_{\tau_s} - p\tau_s\right)\right]\, ds \int n_\alpha(de) \int_0^{V(e)} \exp\left(-pt + i\frac{\lambda}{\pi} h_t(e)\right)\, dt \\
((5.5)) &= \int_0^{+\infty} e^{-s\lambda \coth(\lambda\kappa(p))} ds \int n_\alpha(de) \int_0^{V(e)} \exp\left(-pt + i\frac{\lambda}{\pi} h_t(e)\right)\, dt \\
&= \frac{1}{\lambda \coth(\lambda\kappa(p))} \int n_\alpha(de) \int_0^{V(e)} \exp\left(-pt + i\frac{\lambda}{\pi} h_t(e)\right)\, dt,
\end{aligned}
$$

et alors, grâce à (5.26), on obtient :

$$\int n_\alpha(de) \int_0^{V(e)} \exp\left(-pt + i\frac{\lambda}{\pi}h_t(e)\right) dt = \frac{\lambda}{p \sinh(\lambda\kappa(p))} \tag{5.29}$$

Bibliographie

[1] M.T. Barlow. Continuity of a local times for Lévy processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 69 :23–35, 1985.

[2] M.T. Barlow. Necessary and sufficient conditions for the continuity of local time of Lévy processes. *Annals of Probability*, 16 :1389–1427, 1988.

[3] R. Bass, N. Eisenbaum, and Z. Shi. The most visited sites of symmetric stable processes. *Probab. Theory Relat. Fields*, 116 :391–404, 2000.

[4] R. Bass and P. Griffin. The most visited site of Brownian motion and simple random walk. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 70 :417–436, 1985.

[5] J. Bertoin. On the Hilbert transform of the local times of a Lévy process. *Bull. Sci. Math.*, 119 (2) :147–156, 1995.

[6] J. Bertoin. *Lévy Processes.* Cambridge University Press, 1996.

[7] J. Bertoin, R.A. Doney, and R.A. Maller. Passage of Lévy processes across power law boundaries at small times. *Annals of Probability*, 36 :160–197, 2008.

[8] J. Bertoin, T. Fujita, B. Roynette, and M. Yor. On a particular class of self-decomposable random variables : the duration of a Bessel excursion straddling an independent exponential time. *Prob. Math. Stat.*, 26 :315–366, 2006.

[9] Ph. Biane and M. Yor. Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. *Bull. Sci. Math.*, 111 :23–101, 1987.

[10] N.H. Bingham. Limit theorems in fluctuation theory. *Adv. Appl. Probab.*, 5 :554–569, 1973.

[11] N.H. Bingham. Maxima of sums of random variables and suprema of stable processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebeite*, 26 :273–296, 1973.

[12] R.M. Blumenthal. *Excursions of Markov processes.* Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.

[13] K. Borovkov and Z. Burq. Kendall's identity for the first crossing time revisited. *Electronic Communications in Probability*, 6 :91–94, 2001.

[14] L. Chaumont. *Processus de Lévy et conditionnement.* Thèse de Doctorat de l'université Paris VI, 1994.

[15] L. Chaumont. Excursion normalisée, méandre et pont pour les processus de Lévy stables. *Bull. Sci. Math.*, 121 :377–403, 1997.

[16] Z.Q. Chen, M. Fukushima, and J. Ying. Extending Markov processes in weak duality by Poisson point processes of excursions. *F.E. Benth, G. Di Nunno, T. Lindstrøm, B. Øksendal and T. Zhang. Stochastic Analysis and Applications, The Abel Symposium 2005*, 2 :153–196, 2007.

[17] K.L. Chung. *A course in probability theory.* Academic Press, New york, 1968.

[18] F. Cordero. On the scaling property in fluctuation theory for stable Lévy processes. *Preprint, submitted*, 2010.

[19] R.A. Doney and A.E. Kyprianou. Overshoots and undershoots of Lévy processes. *Ann. Appl. Probab.*, 16 :91–106, 2006.

[20] N. Eisenbaum, H. Kaspi, M. Marcus, J. Rosen, and Z. Shi. A Ray-Knight theorem for symmetric Markov processes. *Annals of probability*, 28 :1781–1796, 2000.

[21] P.J. Fitzsimmons and R.K. Getoor. On the distribution of the Hilbert transform of the local time of a symmetric Lévy process. *Annals of Probability*, 20 :1484–1497, 1992.

[22] P.J. Fitzsimmons and R.K. Getoor. Occupation time distributions for Lévy bridges and excursions. *Stochastic processes and their applications*, 58 :73–89, 1995.

[23] P.J. Fitzsimmons and R.K. Getoor. Excursion theory revisited. *Illinois J. Math.*, 50(1-4) :413–437 (electronic), 2006.

[24] G.B. Folland. *Real Analysis. Modern Techniques and their applications.* Wiley, 1984.

[25] R.K. Getoor. Excursions of a Markov process. *Annals of Probability*, 7 :244–266, 1979.

[26] P. Greenwood and J. Pitman. Fluctuation identities for Lévy processes and splitting at the maximum. *Adv. Appl. Probab.*, 12 :893–902, 1980.

[27] D.V. Gusak. On the joint distribution of the first exit time and exit value for homogeneous processes with independent increments. *Theory Probab. Appl.*, 14 :14–23, 1969.

[28] D.V. Gusak and V.S. Korolyuk. On the joint distribution of a process with the stationary increments and its maximum. *Theory Probab. Appl.*, 14 :400–409, 1969.

[29] K. Itô. Poisson point processes attached to Markov processes. *Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Stat. Probab.*, III :225–239, 1970.

[30] K. Itô and H.P. McKean. *Diffusion processes and their sample paths.* Springer, 1965.

[31] L.F. James, B. Roynette, and M. Yor. Generalized Gamma Convolutions, Dirichlet means, Thorin measures, with explicit examples. *Probab. Surveys*, 5 :346–415, 2008.

[32] T. Jeulin and M. Yor. Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement brownien. *Sém. Prob., XV ; Lect. Notes in Math.*, 850 :210–226, Springer, 1981.

[33] A.E. Kyprianou, J.C. Pardo, and V. Rivero. Exact and asymptotic n-tuple laws at first and last passage. *Ann. Appl. Probab.*, 20.2 :522–564, 2010.

[34] N.N. Lebedev. *Special Functions and their Applications.* Dover, New York, 1972.

[35] P.W. Millar. Germ sigma fields and the natural state space of a Markov process. *Z. Wahrsch. Verw. Gebeite*, 39 :85–101, 1977.

[36] E.A. Pecherskii and B.A. Rogozin. On joint distributions of random variables associated with fluctuations of a process with independent increments. *Theory Probab. Appl.*, 14 :410–423, 1969.

[37] G. Peskir. The law of the hitting times to points by a stable Lévy process with no negative jumps. *Electron. Commun. Probab.*, 13 :653–659, 2008.

[38] Bateman Manuscript Project. *Table of Integral Transforms, Vol. I.* McGraw-Hill, New York, 1954.

[39] D. Ray. Stable process with an absorbing barrier. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 89 :16–24, 1958.

[40] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion.* 3rd ed., Springer, Berlin, 1999.

[41] B.A. Rogozin. On distributions of functionals related to boundary problems for processes with independent increments. *Theory Probab. Appl.*, 11 :580–591, 1966.

[42] P. Salminen and M. Yor. Tanaka formula for symmetric Lévy processes. *Séminaire de Probabilités, XL*, 1899 :265–285, 2007.

[43] K. Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions.* Cambridge Studies in advanced mathematics, 1999.

[44] H.G. Tucker. Absolute continuity of infinitely divisible distributions. *Pac. J. Math*, 12 :1125–1129, 1962.

[45] K. Yano. Excursions away from a regular point for one-dimensional symmetric Lévy processes without Gaussian part. *Potential Anal*, 32 :305–341, 2010.

[46] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. On the laws of first hitting times of points for one-dimensional symmetric stable Lévy processes. *Séminaire de Probabilités XLII*, 1979 :187–227, 2009.

[47] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. Penalising symmetric stable Lévy paths. *J. Math. Soc. Japan*, 61(3) :757–798, 2009.

[48] V.M. Zolotarev. *One-dimensional stable distributions.* Amer. Math. Soc., 1986.